Evaluación Censal de Estudiantes 2018

Informe para **docentes**

¿Qué logran nuestros estudiantes en Matemática?

4.° grado de primaria

Contenido

Pág.

1. Aspectos generales 3
2. ¿Qué logran los estudiantes de 4.° grado de primaria de su IE en Matemática? 4
3. ¿Cómo se relacionan los resultados de 4.° grado con los aprendizajes de grados anteriores? 6
4. ¿Cómo evalúa la ECE en Matemática? 8
5. Niveles de logro en 4.° grado de primaria 10
6. ¿Qué aporta la ECE al trabajo de aula en 4.° grado de primaria? 14
7. Formulación de problemas en el aula: sugerencias pedagógicas 32

Mejores peruan@s Siempre

PERÚ Ministerio de Educación

El Perú Primero

Estimado docente:

Reciba un cordial saludo y mi más sincero reconocimiento por la labor que realiza a diario para promover el desarrollo integral de sus estudiantes.

Somos conscientes de que la educación es la piedra angular de una sociedad, porque a través de ella transformamos a los niños y las niñas en ciudadanos con los conocimientos necesarios para hacer realidad sus proyectos de vida y contribuir a mejorar su entorno.

A fines de 2018, el Ministerio de Educación realizó a nivel nacional la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) y la Evaluación Muestral de Estudiantes (EM) con el fin de obtener información sobre los aprendizajes logrados en ciertos grados y áreas curriculares. Estas evaluaciones son una herramienta muy valiosa que utiliza el sistema educativo para monitorear, a lo largo de los años, cómo se desarrollan los aprendizajes de nuestros estudiantes y en qué medida estamos asegurando su derecho a acceder a una educación de calidad.

Le hacemos llegar los resultados con el fin de que pueda usted utilizar este informe como un documento que oriente su labor educativa y le ayude a analizar qué prácticas pedagógicas pueden ayudar a mejorar las competencias de los escolares.

El futuro de los estudiantes está en nuestras manos. Juntos podemos alcanzar el sueño de ser una nación en la cual todos tengamos las mismas oportunidades.

Atentamente,

Flor Pablo Medina

Ministra de Educación

1. Aspectos generales

¿Qué es la ECE?

La ECE es una evaluación que el Ministerio de Educación implementa en escuelas públicas y privadas con el propósito de conocer qué y cuánto han aprendido los estudiantes peruanos en ciertas áreas y/o competencias del currículo. Los resultados de esta evaluación ofrecen información confiable a directores, docentes y otros actores del sistema educativo sobre los logros de aprendizaje de los estudiantes. A partir de ella, se deben generar espacios de reflexión y orientar las acciones de mejora.

¿Qué se evaluó en la ECE de cuarto grado de primaria?

En 4.° grado de primaria, se evaluaron las áreas curriculares de Comunicación (Lectura) y Matemática.

¿Cómo la ECE atiende la diversidad?

La participación en las evaluaciones de logros de aprendizaje es un derecho de todos los estudiantes. Una de las maneras en que la ECE atiende la diversidad es mediante la adaptación de las pruebas y los procedimientos de aplicación para los estudiantes con algún tipo de discapacidad. De este modo, se asegura la participación de todos los estudiantes en la evaluación.

¿Para qué deben usarse los resultados de la ECE?

Debido a que el aprendizaje es un proceso continuo, los resultados de 4.° grado de primaria no solo reflejan los esfuerzos realizados en un solo año. Estos evidencian principalmente las oportunidades de aprendizaje que los estudiantes han tenido hasta ese momento. Por lo tanto, es importante que las acciones de mejora no solo se centren en el grado evaluado, sino que tomen en cuenta los grados previos.

Además, a partir de los resultados de 4.° grado de primaria en las áreas curriculares evaluadas, las IE pueden implementar en el V ciclo las estrategias de apoyo para que todos los estudiantes, sobre todo aquellos que no lograron los aprendizajes esperados, reciban las oportunidades necesarias para consolidar sus aprendizajes y concluir satisfactoriamente su educación primaria.

2. ¿Qué logran los estudiantes de 4.° grado de primaria de su IE en Matemática?

Las siguientes tablas muestran los resultados de los estudiantes de 4.° grado de primaria de su IE en Matemática en la ECE 2018. Para una mejor comprensión, los resultados deben interpretarse tomando en cuenta la descripción de los niveles de logro que encontrará en las páginas 10 a la 13.

Tabla 2.1 *Resultados de su IE en 4.° grado de primaria en Matemática*

Niveles de logro	Su IE	
	Cantidad	Porcentaje
Satisfactorio		
En proceso		
En inicio		
Previo al inicio		
Total		

Nota: Las escuelas con menos de 10 estudiantes no tienen resultados porcentuales para evitar interpretaciones sesgadas.

Tabla 2.2 *Resultados de su IE en 4.° grado de primaria en Matemática según sexo (en cantidad)*

Niveles de logro	Sexo	
	Hombre	Mujer
Satisfactorio		
En proceso		
En inicio		
Previo al inicio		
Total		

En general, se espera que todos los estudiantes de una escuela logren el nivel Satisfactorio. Además, no deberían existir grandes diferencias entre los resultados de los hombres y de las mujeres. Según estos criterios, ¿cuál es la situación de los estudiantes evaluados en su IE en la ECE 2018?

A nivel nacional, un mayor número de hombres se ubica en el nivel Satisfactorio respecto de las mujeres. En su IE, ¿se aprecia alguna diferencia entre los resultados entre hombres y mujeres?, ¿los hombres y las mujeres tienen similares oportunidades para el desarrollo de sus competencias matemáticas?

A continuación, se presentan los resultados de cada una de las secciones de su IE en Matemática.

Tabla 2.3 *Resultados de su IE en 4.° grado de primaria en Matemática por secciones (en cantidad)*

Secciones	Niveles de logro			
	Satisfactorio	En proceso	En inicio	Previo al inicio
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				
J				
K				
Total				

No deberían existir grandes diferencias entre los resultados de los estudiantes de las distintas secciones. En su escuela, ¿cómo son entre sí los resultados en la ECE 2018 para las distintas secciones? Si los resultados presentan diferencias por sección, posiblemente el criterio que se emplea para ubicar a los estudiantes en las secciones sea inadecuado para garantizar la igualdad de oportunidades de todos los estudiantes. ¿Cómo se determina la pertenencia de los estudiantes a cada una de las distintas secciones de su IE? ¿De qué manera se pueden implementar criterios que garanticen la equidad?

En comparación con los resultados de la ECE 2016, los resultados nacionales de la ECE 2018 muestran un incremento del porcentaje de estudiantes que logran el nivel Satisfactorio en Matemática. En el caso de su IE, ¿se presenta la misma situación?

Para conocer los resultados nacionales, lo invitamos a revisar el *Informe para la IE,* el cual se encuentra en la siguiente dirección:

http://umc.minedu.gob.pe/resultados-ece-2018

3. ¿Cómo se relacionan los resultados de 4.° grado con los aprendizajes de grados anteriores?

El desarrollo de una competencia es un proceso continuo que ocurre a lo largo de la escolaridad. Por ello, los logros de aprendizaje de los estudiantes en 4.° grado de primaria no solo reflejan lo aprendido en este grado específico, sino también los aprendizajes logrados en grados anteriores.

Los estudiantes evaluados en la ECE 2018 en 4.° grado de primaria también fueron evaluados en el 2016 en 2.° grado de primaria. Al comparar los resultados, se encontró una relación entre los resultados de ambas evaluaciones. Por un lado, se halló que los estudiantes que tuvieron buenos resultados en la ECE 2016, por lo general, también los tuvieron en la ECE 2018. Por otro lado, se identificó que los estudiantes que mostraron dificultades en la ECE 2016, por lo general, también las mostraron en la ECE 2018. Aunque esta relación no ocurrió en todos los casos, esta tendencia debe llamar la atención a los distintos actores del sector educativo sobre la necesidad de implementar acciones de apoyo para los estudiantes que no logran los aprendizajes esperados para el grado. Si un estudiante mostró muchas dificultades en la ECE 2016 y no recibió apoyo, posiblemente también haya mostrado dificultades en la ECE 2018.

Un hallazgo similar se obtuvo en el estudio *¿Qué sucede con los aprendizajes en la transición de primaria a secundaria*? Este estudio consideró los resultados de un mismo grupo de estudiantes que fue evaluado en la ECE 2009, la EM 2013 y la ECE 2015. En este caso, los resultados obtenidos por este grupo en la ECE 2009 (2.° de primaria) permitían predecir sus resultados en la ECE 2015 (2.° de secundaria).

Los hallazgos antes mencionados no deben interpretarse de manera determinista, es decir, que los resultados de los grados previos determinan los logros posteriores. Estos hallazgos muestran tendencias que pueden (y deben) ser cambiadas si se brindan las acciones de apoyo necesarias a los estudiantes que no logran los aprendizajes esperados para el grado.

En particular, el ciclo III (1.° y 2.° de primaria) es clave para la consolidación de aprendizajes en las áreas de Comunicación y de Matemática. Por ejemplo, en estos grados, los estudiantes deben apropiarse del código escrito; desarrollar sus competencias comunicativas (lectura, escritura y expresión oral); construir el significado de número; y desarrollar sus habilidades para utilizar los números y las operaciones en diversas situaciones. Estos aprendizajes brindan herramientas básicas a los estudiantes para seguir aprendiendo en las áreas de Comunicación y Matemática, así como en las otras áreas curriculares.

Por todo ello, el trabajo docente no debe restringirse a los grados evaluados por la ECE. Por el contrario, resulta necesario planificar e implementar estrategias didácticas desde los primeros grados y durante toda la escolaridad que aseguren los aprendizajes esperados según el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB). De igual manera, estos esfuerzos no deben restringirse únicamente a las áreas curriculares y competencias evaluadas por la ECE.

¿Cuáles fueron los resultados nacionales en la EM 2018 de 2.º de primaria?

Para conocer estos resultados, lo invitamos a revisar el siguiente enlace:

http://umc.minedu.gob.pe/evaluacion-muestral-2018

4. ¿Cómo **evalúa** la **ECE**

Para evaluar las competencias matemáticas en 4.º de primaria, la prueba se basó en los aprendizajes descritos en los documentos curriculares vigentes. La siguiente infografía muestra los elementos considerados en la construcción de la prueba.

Capacidades por competencia

- **Resuelve problemas de cantidad**
  - Traduce cantidades a expresiones numéricas.
  - Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.
  - Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.
  - Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
- **Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio**
  - Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.
  - Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
  - Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.
  - Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencias.
- **Resuelve problemas de forma, movimiento y localización**
  - Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.
  - Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.
  - Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio.
  - Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.
- **Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre**
  - Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.
  - Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
  - Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.
  - Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

en **Matemática?**

Conocimientos utilizados

- Noción de número
- Sistema de numeración decimal
- Operaciones y propiedades
- Noción de fracción

Cantidad

- Secuencias numéricas y gráficas
- Números desconocidos en operaciones o comparaciones
- Relaciones entre magnitudes

Regularidad, equivalencia y cambio

- Formas geométricas de 2 y 3 dimensiones
- Desplazamientos y posiciones
- Traslación y simetría

Forma, movimiento y localización

- Tablas y gráficos estadísticos
- Frecuencias y moda
- Nociones de seguro, posible (probable) e imposible

Gestión de datos e incertidumbre

Contextos involucrados

Contexto extramatemático

Situación real o simulada

Ejemplo

En la tienda hay **12** pelotas de fútbol y **7** pelotas de básquet. ¿Cuántas pelotas de fútbol más que pelotas de básquet hay?

Contexto intramatemático

Situación referida solo a lo matemático

Ejemplo

¿De qué número es **9** la tercera parte?

5. Niveles de logro de Matemática de 4.° grado de primaria

En la ECE, los resultados de los estudiantes se presentan mediante niveles de logro. Según sus respuestas en la prueba, los estudiantes de 4.° grado de primaria se ubican en uno de los siguientes niveles: Satisfactorio, En proceso, En inicio o Previo al inicio.

Los niveles de logro son descripciones de los conocimientos y las habilidades que los estudiantes demuestran al resolver las preguntas de la ECE. Dichas descripciones guardan estrecha relación con los aprendizajes propuestos en el CNEB. Además, se debe tener en cuenta que los niveles de logro son inclusivos. Por ejemplo, los estudiantes ubicados en el nivel Satisfactorio también logran los aprendizajes descritos en los niveles En proceso y En inicio.

Nivel Satisfactorio

Los estudiantes de este nivel, además de lograr los aprendizajes de los niveles En proceso y En inicio, interpretan y representan los números naturales de distinta forma. Emplean estos números para resolver y modelar problemas aditivos o multiplicativos de varias etapas, y utilizan fracciones para comunicar diversas situaciones. También, interpretan y deducen información de gráficos estadísticos, e identifican la ocurrencia de sucesos simples usando las nociones de seguro, posible e imposible.

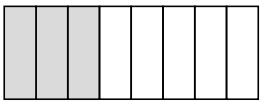
Asimismo, resuelven problemas que presentan equivalencias, regularidades o relaciones de cambio entre dos magnitudes. Interpretan y usan la igualdad como equilibrio y equivalencia; también, la aplican en la medición del tiempo y longitudes, o la relacionan con hasta dos equivalencias para deducir nueva información. Además, visualizan figuras geométricas y deducen información que es empleada para resolver problemas, algunos de los cuales involucran el perímetro y el área de dichas figuras.

El nivel Satisfactorio describe lo que todo estudiante peruano debería lograr al finalizar el cuarto grado de primaria. No constituye un nivel destacado o de excelencia.

A continuación, se presentan algunas tareas representativas de este nivel aplicadas en la ECE 2018.

José sembró zanahorias en los $\frac{3}{5}$ de un terreno de forma rectangular. ¿En cuál de los siguientes gráficos la parte sombreada corresponde al terreno sembrado con zanahorias?

a

b 

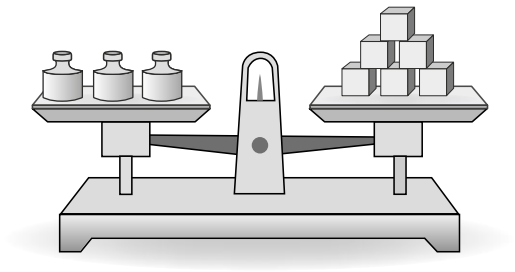
c

d

El estudiante interpreta el uso de las fracciones en su significado como parte-todo, con cantidades continuas o discretas.

Así puede reconocer que el 5 del denominador corresponde con las partes en que se dividió el terreno y el 3 del numerador corresponde a la parte sombreada en el gráfico.

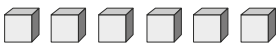
Esta balanza está en equilibrio. Observa:



Cada tiene el mismo peso.

Cada tiene el mismo peso.

Según esto, una pesa:

a 

b

c

d

El estudiante resuelve problemas que involucran establecer equivalencias o canjes.

En este caso, relaciona la cantidad de pesas que observa en un plato con la cantidad de cubos que observa en el otro y puede determinar que una corresponde a .

Nivel En proceso

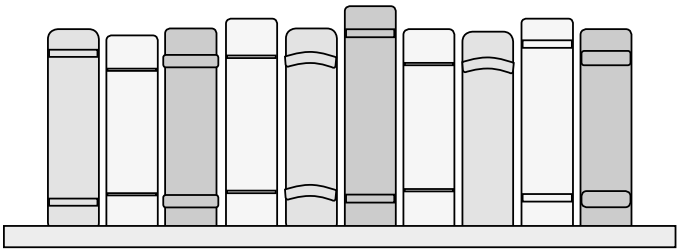
Los estudiantes de este nivel, además de lograr los aprendizajes del nivel En Inicio, usan los números naturales para resolver y modelar problemas aditivos o multiplicativos sencillos de hasta dos etapas vinculados a diversas situaciones. También, evidencian una comprensión inicial de la noción de fracción.

Además, organizan datos en tablas y los interpretan, considerando hasta dos variables estadísticas. Interpretan algunos gráficos estadísticos e identifican la noción de moda en situaciones sencillas.

Asímismo, a partir de equivalencias que involucran relaciones aditivas o multiplicativas, hallan un valor desconocido. También, identifican figuras geométricas en variadas posiciones y usan la noción de área con unidades no convencionales.

A continuación, se presenta una tarea representativa de este nivel aplicada en la ECE 2018.

En la repisa de un aula, hay varios libros. Observa:



La profesora quiere repartir todos los libros de la repisa, en igual cantidad, a cinco estudiantes. ¿Cuántos libros le debe dar a cada uno?

- a 10 libros.
- b 5 libros.
- c 2 libros.
- d 1 libro.

El estudiante resuelve problemas de estructura multiplicativa que involucran situaciones con números naturales de proporcionalidad simple, comparación o combinación.

En este caso, reconoce que debe realizar un reparto equitativo de la cantidad de libros que observa, entre los cinco estudiantes.

Nivel En inicio

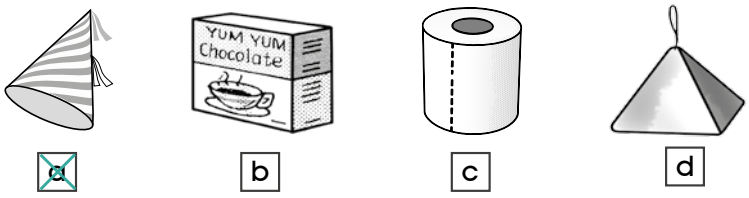
Los estudiantes de este nivel realizan composiciones y canjes de cantidades respecto del sistema de numeración decimal, y las interpretan y expresan de forma numérica. Resuelven problemas aditivos con datos explícitos de una etapa de resolución vinculados a situaciones cercanas al estudiante. Calculan, usando algoritmos o estrategias de conteo, operaciones de adición y sustracción.

Además, interpretan cantidades en tablas estadísticas haciendo referencia a una variable. Reconocen y aplican el patrón de algunas secuencias. Hallan un valor desconocido en una equivalencia numérica explícita.

También, identifican algunas formas bidimensionales y tridimensionales. Usan intuitivamente nociones geométricas si la información es explícita y visualizan algunas caras de un cuerpo geométrico.

A continuación, se presenta una tarea representativa de este nivel aplicada en la ECE 2018.

¿Cuál de los siguientes objetos tiene la forma de un **cono**?



El estudiante identifica formas bidimensionales o tridimensionales directamente observables o deducibles en objetos.

Nivel Previo al inicio

Los estudiantes no lograron los aprendizajes necesarios para estar en el nivel En inicio.

Es indispensable brindar una atención especial a los estudiantes que se ubican en el nivel Previo al inicio. Este grupo de estudiantes requiere que los docentes les ofrezcan un acompañamiento más cercano para conseguir la mejora de sus aprendizajes.

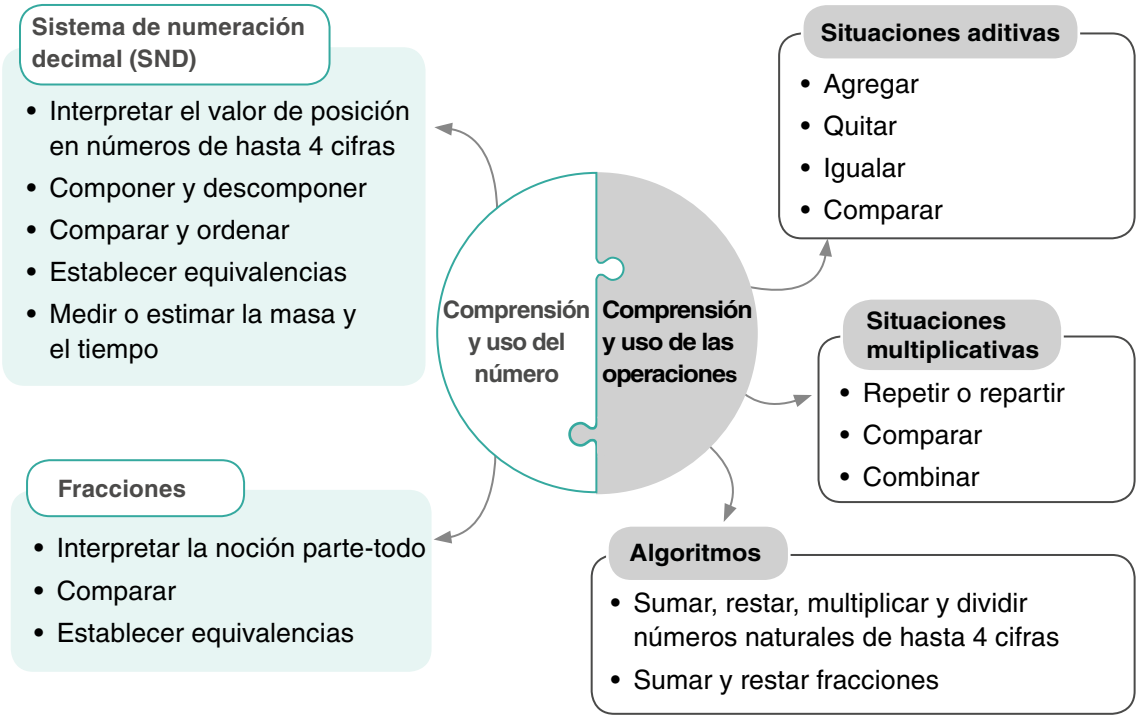
6. ¿Qué aporta la ECE al trabajo de aula en 4.° grado de primaria?

A partir de los resultados de la ECE, se brinda información sobre los logros y dificultades de los estudiantes, así como recomendaciones para facilitar y mejorar la gestión pedagógica del docente en el aula y fortalecer los aprendizajes de los estudiantes.

Esta sección se presenta de la siguiente manera para cada competencia.

- **Organizadores gráficos sobre las competencias.** Se brinda un panorama de los aprendizajes esperados para el grado según el currículo vigente.
- **Hallazgos sobre los aprendizajes logrados por los estudiantes.** Estos se encuentran expresados a través de logros y dificultades de algunos aspectos evaluados con la prueba. Por un lado, los logros muestran el razonamiento y algunas estrategias usadas por los estudiantes para llegar a sus soluciones. Por otro lado, las dificultades expresan interpretaciones equivocadas de los estudiantes que los condujeron al error.
- **Sugerencias para el trabajo en aula.** Se centran en la atención del proceso de aprendizaje de conceptos y en pautas para superar las dificultades en su enseñanza.

Competencia **Resuelve problemas de cantidad**

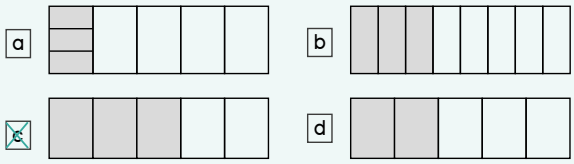


Hallazgo en la competencia Resuelve problemas de cantidad

Los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de la noción de fracción como parte-todo. Para ilustrar este hallazgo, a continuación se presentan y analizan dos tareas.

Tarea 1

José sembró zanahorias en los $\frac{3}{5}$ de un terreno de forma rectangular. ¿En cuál de los siguientes gráficos la parte sombreada corresponde al terreno sembrado con zanahorias?



Competencia: Resuelve problemas de cantidad.

Capacidad: Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.

Conocimiento: Fracciones

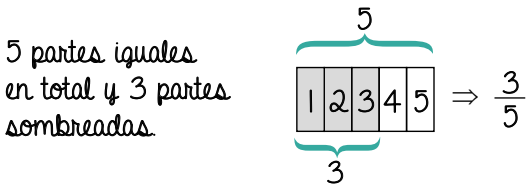
Nivel: Satisfactorio

Respuesta correcta: c. Esta alternativa fue elegida por el 69,7 % de los estudiantes evaluados.

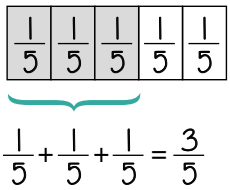
Logros de los estudiantes

Para resolver correctamente esta tarea, los estudiantes deben interpretar la fracción en su significado como parte-todo a partir de una representación simbólica y relacionarla con una representación gráfica. Probablemente, los estudiantes interpretaron la situación correctamente, de una de las siguientes maneras, dando como respuesta la alternativa c.

- Interpreta la fracción como parte–todo mediante el proceso de doble conteo.



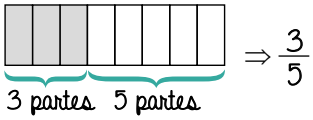
- Identifica la fracción unitaria y, a partir de ella, obtiene la fracción deseada.



Dificultades encontradas

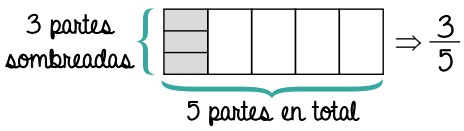
Sin embargo, el grupo de estudiantes que marcó las otras alternativas evidencia que no comprenden el concepto de fracción y sus elementos. Posiblemente, estos estudiantes interpretan la fracción como dos números que se visualizan de manera independiente. A continuación, se presentan los procedimientos que probablemente emplearon estos estudiantes.

- Considera 3 partes de un color y 5 partes de otro color.



Respuesta incorrecta: b. Esta alternativa fue elegida por el 22,3 % de los estudiantes evaluados.

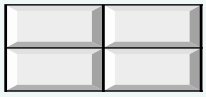
- Identifica el todo como 5 partes iguales pero se equivoca al reconocer la parte sombreada.



Respuesta incorrecta: a. Esta alternativa fue elegida por el 5,0 % de los estudiantes evaluados.

Tarea 2

Teresa repartió este chocolate entre sus hermanos.



Ella le dio $\frac{1}{2}$ del chocolate a Miguel y $\frac{1}{4}$ del chocolate a Diego y se quedó con el resto. ¿Qué parte del chocolate repartió entre sus hermanos?

- [a] $\frac{1}{8}$ del chocolate
- [b] $\frac{2}{4}$ del chocolate
- [c] $\frac{3}{4}$ del chocolate
- [d] $\frac{2}{6}$ del chocolate

Competencia: Resuelve problemas de cantidad.

Capacidad: Traduce cantidades a expresiones numéricas.

Conocimiento: Fracciones

Nivel: Satisfactorio

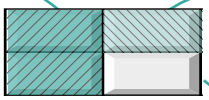
Respuesta correcta: c. Esta alternativa fue elegida por el 22,8 % de los estudiantes evaluados.

Logros de los estudiantes

Los estudiantes que lograron responder correctamente esta pregunta demostraron que son capaces de usar la noción de fracción en situaciones aditivas. A continuación, se presentan algunas soluciones correctas a la tarea planteada, dando como respuesta la alternativa c.

- Representa en el gráfico cada una de las fracciones e interpreta el resultado usando el soporte gráfico.

Para Miguel $\frac{1}{2}$



Para Diego $\frac{1}{4}$

Quedó sin repartir $\frac{1}{4}$ entonces, repartió $\frac{3}{4}$

- Resuelve simbólicamente usando equivalencias.

Miguel $\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$

Diego $\rightarrow \frac{1}{4}$

Total $= \frac{3}{4}$ del chocolate

- Resuelve usando algoritmos.

Repartió a Miguel $= \frac{1}{2}$

Repartió a Diego $= \frac{1}{4}$

Repartió en total $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Dificultades encontradas

Los estudiantes que no respondieron correctamente esta pregunta evidencian que tienen dificultades para interpretar nociones aditivas de fracciones. Posiblemente, aplicaron estrategias que reflejan procesos o nociones no comprendidos. A continuación, se presentan los procedimientos que probablemente emplearon estos estudiantes.

- Suma numeradores y denominadores de forma independiente.

Repartió a Miguel $\rightarrow \frac{1}{2}$ Repartió a Diego $\rightarrow \frac{1}{4}$

Repartió en total $\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{2+4} = \frac{2}{6}$

Respuesta incorrecta: d. Esta alternativa fue elegida por el 37,2 % de los estudiantes evaluados.

- Usa el mínimo común denominador pero suma numeradores sin considerar las equivalencias de fracciones.

$$\text{Repartió: a Miguel} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{a Diego} \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$\text{Repartió en total} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4}$$

Respuesta incorrecta: b. Esta alternativa fue elegida por el 28,4 % de los estudiantes evaluados.

- Resuelve usando algoritmos de multiplicación de fracciones.

$$\text{Repartió: a Miguel} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{a Diego} \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$\text{Repartió en total} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$$

Respuesta incorrecta: a. Esta alternativa fue elegida por el 11,0 % de los estudiantes evaluados.

Sugerencias para trabajar la comprensión de la noción de fracción como parte-todo y usar las operaciones con fracciones en el aula

Como ha mostrado el análisis de las tareas 1 y 2 (páginas 15 y 16), los estudiantes tienen dificultades para interpretar la noción de fracción y de adición de fracciones. Por ello, la importancia del desarrollo en clase de estas nociones mediante situaciones significativas y el uso de representaciones que faciliten la comprensión de las operaciones con fracciones. Tome en cuenta las siguientes sugerencias.

Aborde la noción de fracción mediante situaciones reales que garanticen la comprensión de su significado.

El aprendizaje de la noción de fracción debe estar asociada a situaciones de la vida diaria para que el estudiante no asuma que las fracciones solo están presentes cuando se trabajan en clases de matemática. Estas situaciones deben propiciar el aprendizaje de las fracciones en sus diferentes significados[1]: fracción parte-todo (continuo y discreto), fracción como cociente, fracción como razón, fracción como operador y fracción como medida. Por ejemplo, si se emplea el significado de fracción como parte-todo continuo, el todo que se debe dividir en una determinada cantidad de partes iguales puede ser un terreno, una torta, una cartulina, una hoja de papel, una cinta, etc. En estas actividades, la situación propuesta debe ir acompañada de alguna representación: concreta, gráfica, verbal o simbólica.

Proponga situaciones en las que los estudiantes descubran que dividir el todo en "partes iguales" implica tener partes de áreas equivalentes y no necesariamente de la misma forma.

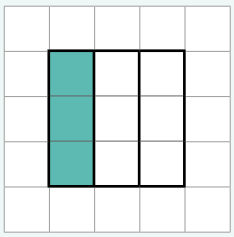
Una práctica docente común es presentar las "partes iguales" solo como partes con la misma forma, lo cual es una buena estrategia para introducir la noción de fracción. Sin embargo, luego se debe hacer referencia a que eso no implica, necesariamente, que las partes deban ser idénticas, sino que se refiere a partes iguales en su extensión.

[1] Para saber más acerca de los significados de fracciones, se puede consultar el Anexo D del Informe de evaluación de matemática de sexto grado 2013, (páginas 161-163). Disponible en http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/07/EM_Matematica_baja-2.pdf

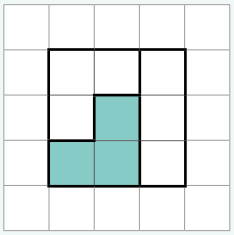
A continuación, se presenta una tarea de este tipo.

Pedro y María se encargaron de diseñar unas losetas. Observa sus diseños.

Pedro



María



- ¿En cuántas partes ha dividido la loseta María? ¿Son partes iguales?
- ¿Qué parte de la loseta ha pintado María?
- ¿Qué parte de la loseta ha pintado Pedro?
- Explica tus respuestas.

En la tarea propuesta, el estudiante puede concluir que las partes en las que María ha dividido la loseta son iguales en área. Además, puede explicar su respuesta afirmando que cada parte tiene la misma cantidad de cuadraditos y puede usar diferentes representaciones para expresarla. Por ejemplo:

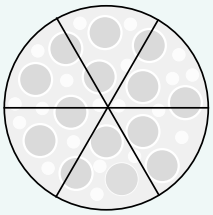
María ha pintado la tercera parte de la loseta (Representación verbal)

Pedro ha pintado $\frac{1}{3}$ de la loseta (Representación simbólica)

Enfatice la comprensión del significado de las operaciones con fracciones más que las reglas de cálculo.

Los resultados de la ECE han mostrado la dificultad que tienen los estudiantes para interpretar la noción de la adición de fracciones. Por ello, es fundamental proponer actividades en las que usen representaciones gráficas, que les ayuden a comprender las operaciones y sus representaciones simbólicas. Observe el ejemplo.

La mamá de Lorena y Marcos ha preparado la siguiente *pizza*.



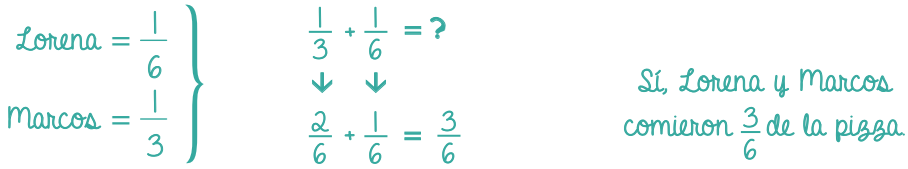
Lorena comió la sexta parte de la *pizza* y Marcos comió la tercera parte de la *pizza*.

A partir de esta situación, se podrían proponer las siguientes tareas:

- Representa gráficamente la parte de la *pizza* que comió Marcos.
- Representa gráficamente la parte de la *pizza* que comió Lorena.
- Responde, ¿qué fracción de la *pizza* comieron en total Lorena y Marcos?

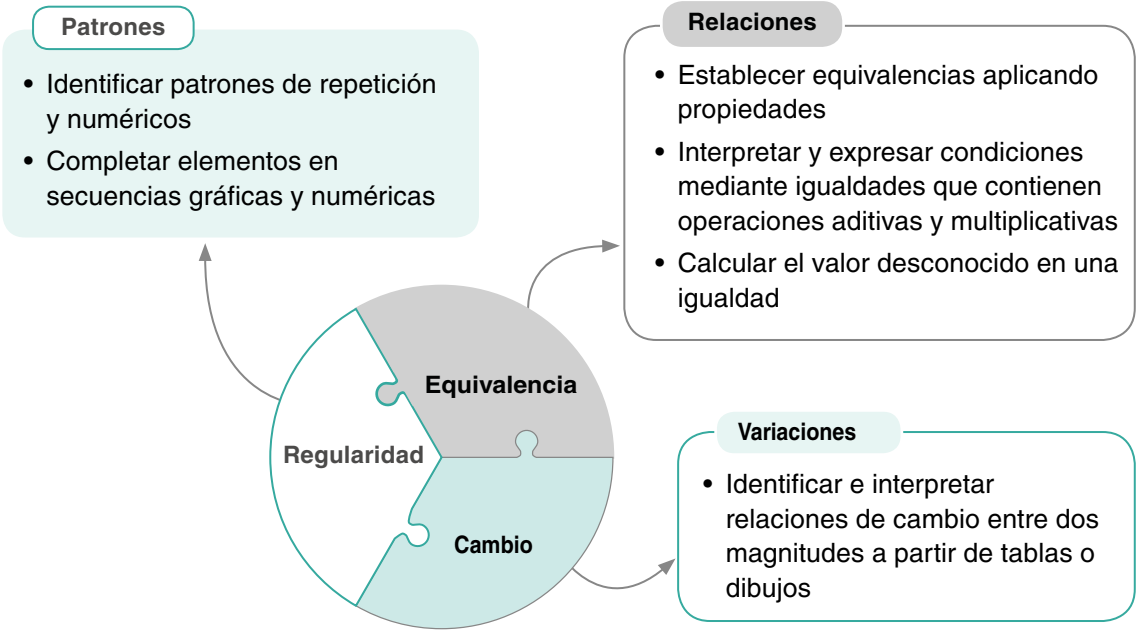
El estudiante podría dar la siguiente respuesta:

- Representa simbólicamente la parte de la *pizza* que comieron Lorena y Marcos. Luego, calcula la parte de la *pizza* que comieron en total. ¿Obtienes el mismo resultado que en la tarea anterior?



De esta manera, los estudiantes obtienen respuestas con las que pueden dar sentido a las operaciones.

Competencia **Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio**

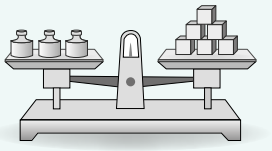


Hallazgo en la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio

La mayoría de estudiantes resuelve exitosamente las tareas que presentan una sola equivalencia gráfica. En contraste, si la situación involucra más de una equivalencia, el nivel de dificultad se incrementa considerablemente para muchos de ellos, a pesar de contar con soporte gráfico. Esto se observa en el análisis de dos tareas que mostramos a continuación.

Tarea 1

Esta balanza está en equilibrio. Observa:



Cada tiene el mismo peso.

Cada tiene el mismo peso.

Según esto, una pesa:

a

b

c

d

Competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Capacidad: Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.

Conocimiento: Equivalencias

Nivel: Satisfactorio

Respuesta correcta: c. Esta alternativa fue elegida por el 65,5 % de los estudiantes evaluados.

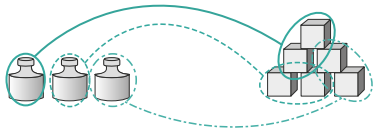
Logros de los estudiantes

Para responder correctamente esta tarea, el estudiante debe establecer relaciones de equivalencia entre los elementos propuestos en el gráfico. Probablemente, los estudiantes emplearon una de las siguientes estrategias, las cuales evidencian la comprensión de la noción de equivalencia, dando como respuesta la alternativa c.

- Aplica el ensayo y error a partir de un razonamiento proporcional (veces que se repite).

  Para 1 pesa son 2 cubitos. ✓
  Para 2 pesas son 4 cubitos.
  Para 3 pesas son 6 cubitos.

- Asocia los cubitos a cada pesa con la idea de reparto.



1 pesa es como 2 cubitos.

Dificultades encontradas

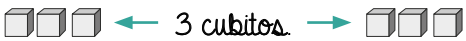
Por otro lado, el grupo de estudiantes que marcó las otras alternativas no interpreta la relación de equivalencia expresada y solo realiza algún procedimiento numérico. A continuación, se presentan los procedimientos que probablemente emplearon estos estudiantes.

- Cuenta los cubitos del segundo plato.

Son 6 cubitos.

Respuesta incorrecta: a. Esta alternativa fue elegida por el 22,4 % de los estudiantes evaluados.

- Realiza un reparto sencillo de los 6 cubitos del segundo plato (en dos partes iguales).



Respuesta incorrecta: b. Esta alternativa fue elegida por el 8,0 % de los estudiantes evaluados.

- Relaciona los dos íconos (uno a uno) sin considerar la equivalencia.

Respuesta incorrecta: d. Esta alternativa fue elegida por el 3,5 % de los estudiantes evaluados.

Tarea 2

Observa:

Al llenar las jarras con agua se cumple lo siguiente:

Una botella llena de agua, ¿a cuántos vasos equivale?

Competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Capacidad: Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.

Conocimiento: Equivalencias

Nivel: Satisfactorio

Respuesta correcta: a. Esta alternativa fue elegida por el 46,7 % de los estudiantes evaluados.

Logros de los estudiantes

Los estudiantes que lograron responder correctamente esta pregunta interpretan la información gráfica y usan intuitivamente las propiedades de las igualdades. Probablemente, los estudiantes emplearon algunas de las siguientes estrategias, evidenciando la relación entre las dos equivalencias y dando como respuesta la alternativa a.

- Usa lenguaje cotidiano.

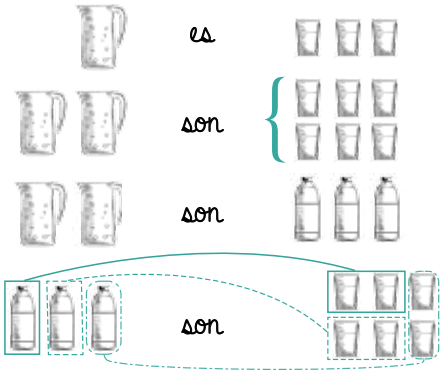
1 jarra ⇨ 3 vasos
2 jarras ⇨ 6 vasos } Duplica cada lado (uniformidad).

2 jarras ⇨ 3 botellas —— Dato

3 botellas ⇨ 6 vasos —— Sustituye

1 botella ⇨ 2 vasos Tercera parte en cada lado (propiedad cancelativa).

- Usa representación gráfica.



Dificultades encontradas

Sin embargo, los estudiantes que marcaron las otras alternativas evidencian que no comprenden la noción de equivalencia. Posiblemente, estos estudiantes no interpretan adecuadamente las dos equivalencias de la tarea o las relacionan entre sí equivocadamente. A continuación, se presentan los procedimientos que probablemente emplearon estos estudiantes.

- Expresa solo una equivalencia de manera explícita.

Una jarra es 3 vasos.

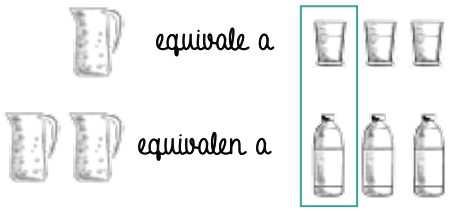
Respuesta incorrecta: d. Esta alternativa fue elegida por el 27,3 % de los estudiantes evaluados.

- Establece algunas relaciones correctas, pero no responde la tarea planteada.

Una jarra es 3 vasos.
Dos jarras son 6 vasos.

Respuesta incorrecta: b. Esta alternativa fue elegida por el 18,5 % de los estudiantes evaluados.

- Asocia gráficamente las dos equivalencias dadas sin considerar el sentido de cada una.



Respuesta incorrecta: C. Esta alternativa fue elegida por el 6,6 % de los estudiantes evaluados.

Sugerencias para trabajar equivalencias en el aula

La noción de equivalencia se debe consolidar en el aula tomando en cuenta la edad y el nivel de desarrollo del pensamiento del estudiante a lo largo de toda la primaria. Esta noción, como parte del desarrollo del pensamiento algebraico, se forma desde los primeros grados a partir de tareas que impliquen representar y generalizar patrones y regularidades en diversas situaciones cotidianas. Considere las siguientes sugerencias.

Proponga actividades con material concreto usual para los estudiantes.

Por ejemplo, a partir de un grupo de monedas como el que se muestra, pida a sus estudiantes que establezcan más de una equivalencia y que las expresen verbalmente. Ellos podrían decir: "una moneda de 5 soles vale igual que dos monedas de 2 soles y una moneda de 1 sol".

Note que en estas actividades no es posible la verificación a través de los sentidos por parte de sus estudiantes: dos monedas de 1 sol no encajan en una moneda de 2 soles; pero sí se consolida la noción de equivalencia como “vale igual”.

Plantee a los estudiantes tareas con equivalencias arbitrarias, establecidas por consenso, a manera de canje.

Por ejemplo, acuerde con los estudiantes, a manera de canje, una equivalencia entre chapitas y vasos, como la que se muestra.

Luego, presente tareas como las siguientes:

- Para conseguir 4 vasos, ¿cuántas chapitas necesito?
- Tengo 24 chapitas, ¿a cuántos vasos equivalen?
- Quiero conseguir 6 vasos y tengo 7 chapitas. ¿Cuántas chapitas me faltan para poder hacer el canje?

Este tipo de actividades se enriquece si los estudiantes manipulan directamente el material concreto, en este caso, las chapitas y los vasos necesarios para representar cada situación y realizar los canjes respectivos con sus compañeros.

Tenga en cuenta que la realización de estos canjes ayuda a los estudiantes a desarrollar su razonamiento proporcional.

Los estudiantes pueden establecer relaciones como las siguientes.

1 vaso = 3 chapitas
2 vasos = 6 chapitas
3 vasos = 9 chapitas

Asimismo, a partir de la equivalencia dada, anímelos a obtener otras expresiones equivalentes. Por ejemplo, pídales que completen la siguiente expresión.

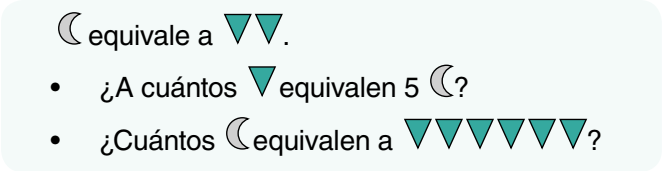
Con 10 chapitas puedo tener…

3 vasos + 1 chapita
2 vasos + 4 chapitas
1 vaso + 7 chapitas

} Todas estas expresiones son equivalentes entre sí.

Estas tareas permiten al estudiante consolidar la comprensión de que una misma situación puede expresarse de distintas formas.

Proponga equivalencias con representaciones gráficas para que sus estudiantes realicen canjes. Plantee tareas como la que se muestra.



Le sugerimos proponer actividades variadas a partir de una equivalencia pues es lo esperado para estudiantes de tercer grado. Además, la evidencia muestra que un 65,5 % de los estudiantes de cuarto grado resuelven satisfactoriamente actividades con una equivalencia como la mostrada en la tarea 1 de la balanza (página 20).

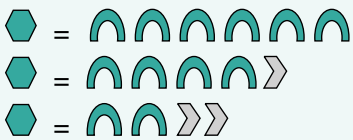
Plantee y desarrolle con los estudiantes tareas a partir de más de una equivalencia. Estas tareas, tales como la tarea 2 de las jarras, las botellas y los vasos (página 21), corresponden a los desempeños esperados para estudiantes de cuarto grado. La situación propuesta en esta tarea responde a una situación cotidiana para los estudiantes del grado, pero incluso con el soporte gráfico solo lo pudieron resolver satisfactoriamente el 46,7 % de los estudiantes.

En el aula, luego de trabajar situaciones cotidianas variadas, trabaje también con representaciones gráficas de dos equivalencias. Por ejemplo:

Proponga estas dos equivalencias.

Luego, pida tres equivalencias diferentes para .

Los estudiantes podrían dar respuestas como las siguientes.



También, podría preguntar:

- ¿Cuántos son ?
- ¿Cuántos son + ?

Permita que los estudiantes expliquen sus procedimientos

Finalmente, puede proponer situaciones en las que los estudiantes tengan que combinar en sus representaciones el uso de íconos y de signos. Por ejemplo:

2 M = 30

¿Cuánto vale M? ¿Cuánto vale M + 5?

El uso del lenguaje algebraico también se va incorporando gradualmente. En un inicio, es suficiente que sus estudiantes usen expresiones coloquiales como las siguientes: “Una barra es igual a 10 cubitos”, “tres chapitas valen tanto como un vaso”, “una media luna equivale a dos triángulos”, etc.

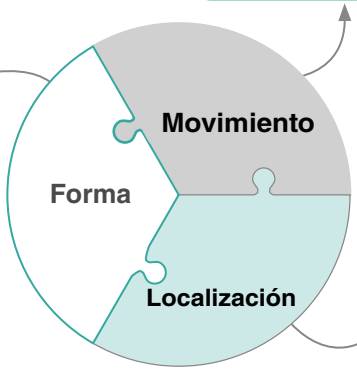
Competencia **Resuelve problemas de forma, movimiento y localización**

Formas bidimensionales y tridimensionales

- Visualizar, representar y describir elementos y propiedades de las formas
- Construir formas mediante composición y descomposición
- Medir la longitud, superficie y capacidad de objetos
- Usar unidades convencionales y no convencionales, recursos e instrumentos de medición

Transformaciones

- Identificar formas simétricas
- Realizar traslaciones



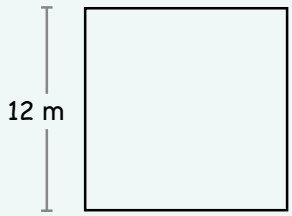
Orientación

- Elaborar croquis
- Describir desplazamientos y posiciones en el plano y en el espacio

Hallazgo en la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Los estudiantes tienen dificultades para establecer relaciones entre las propiedades de las formas geométricas y sus atributos medibles. Esto se observa en el análisis de la siguiente tarea.

¿Cuánto mide el perímetro de este cuadrado?



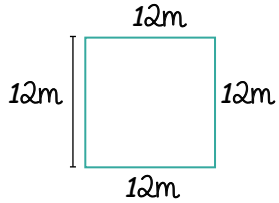
a 12 m
b 24 m
c 48 m
d 144 m

Competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.
Capacidad: Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.
Conocimiento: Perímetro
Nivel: Satisfactorio
Respuesta correcta: c. Esta alternativa fue elegida por el 58,1 % de los estudiantes evaluados.

Logros de los estudiantes

Para resolver satisfactoriamente esta tarea, los estudiantes relacionan correctamente las características del cuadrado y su perímetro. A continuación, se presentan algunas soluciones que dan como respuesta la alternativa c.

- Traduce la información a un modelo gráfico y determina el perímetro del cuadrado.



Un cuadrado tiene 4 lados con igual medida

Perímetro = 12 + 12 + 12 + 12 = 48 m

- Relaciona el concepto de perímetro con las características del cuadrado a través de un modelo simbólico.

Perímetro = 4 × medida del lado

Perímetro = 4 × 12 = 48 m

Dificultades encontradas

Por otro lado, los estudiantes que marcaron otras alternativas evidencian que establecen relaciones incorrectas entre las características del cuadrado y su perímetro. Posiblemente, estos estudiantes emplearon alguno de los siguientes procedimientos.

- Asocia la medida del lado del cuadrado con su perímetro.

Perímetro = 12 m

Respuesta incorrecta: a. Esta alternativa fue elegida por el 25,2 % de los estudiantes evaluados.

- Relaciona las dos dimensiones de una forma plana (largo y ancho) con su perímetro.

Largo: 12 m Ancho: 12 m

Perímetro = 12 + 12 = 24 m

Respuesta incorrecta: b. Esta alternativa fue elegida por el 12,2 % de los estudiantes evaluados.

- Reconoce las características del cuadrado, pero las asocia al perímetro a través de un modelo multiplicativo.

Perímetro = lado × lado

Perímetro = 12 × 12

Perímetro = 144 m

Respuesta incorrecta: d. Esta alternativa fue elegida por el 4,0 % de los estudiantes evaluados.

Sugerencias para trabajar forma en el aula

Existen creencias, respecto al aprendizaje de la geometría, que sobrevaloran la evocación de fórmulas previamente memorizadas para aplicarlas y calcular. Estas resultan inadecuadas con el actual entendimiento de la Matemática como una manera de pensar y razonar. El aprendizaje de la geometría debe tener como objetivo que el estudiante conozca y se familiarice con el espacio y su entorno, a partir de actividades que lo inviten a desarrollar su intuición al experimentar con material concreto para desarrollar imágenes y representaciones mentales, en una situación didáctica diseñada con objetivos claros.

Es importante estimular en los estudiantes, desde los primeros grados, el desarrollo de habilidades para visualizar, comunicar, dibujar, argumentar y modelar los objetos y las relaciones que encuentra entre ellos.

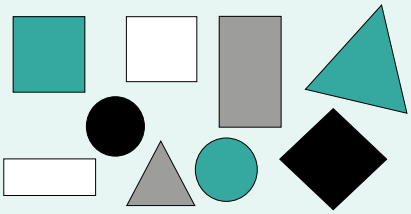
Tome en cuenta las siguientes sugerencias.

Considere el nivel de razonamiento de los estudiantes.

Las investigaciones concuerdan con las propuestas del modelo van Hiele[2], el cual considera distintos niveles de razonamiento que no están asociados, necesariamente, a la edad y que son jerárquicos, secuenciales y ordenados. Por ende, este modelo supone que un estudiante no puede alcanzar un determinado nivel sin haber superado de forma apropiada los niveles anteriores. Algunas características de estos niveles de razonamiento son los siguientes.

Nivel 1: Visualización o reconocimiento. Los estudiantes perciben los objetos como una unidad, sin reconocer sus elementos ni propiedades y los describen por su apariencia física.

Por ejemplo, presente a sus estudiantes una foto con la forma de un cuadrado. Entregue un grupo de bloques lógicos, como el que se muestra, y pida que reconozcan qué piezas tienen la misma forma que la foto.

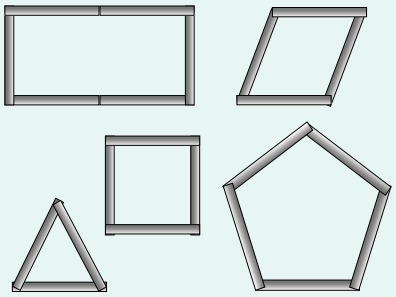


En esta tarea, los estudiantes realizan un reconocimiento sensorial (visual o táctil). Posteriormente, aprenden el nombre "cuadrado" y lo reconocen como una nominación sin tomar en cuenta su color o tamaño. Ellos no necesitan describir sus elementos ni reconocer aún sus propiedades, ven al objeto como un todo. Algunas veces, el reconocimiento de la figura está condicionado a su posición en el plano. Así, algunos estudiantes podrían no reconocer, en un gráfico como el anterior, al cuadrado negro como un "cuadrado" porque la figura no está apoyada sobre uno de sus lados.

Nivel 2: Análisis. Los estudiantes reconocen los elementos y propiedades de los objetos a través de la observación y la experimentación. A partir de ello, los describen considerando sus partes y enunciando algunas de sus propiedades. Sin embargo, aún no pueden relacionar estas propiedades entre sí, ni pueden relacionar las propiedades de una forma con las propiedades de otras formas u objetos. Tampoco pueden establecer clasificaciones, porque perciben las figuras y objetos de manera aislada.

Por ejemplo, entregue a sus estudiantes cierta cantidad de palitos y pídales que, uniéndolos por sus extremos, armen diferentes figuras, como estas. Plantee las siguientes preguntas.

- ¿Cuál de estas figuras es un cuadrado?
- ¿Qué figura se parece al cuadrado? ¿En qué se parece? ¿En qué se diferencia?



2 FOUZ (2004-2005) Modelo de van Hiele para la didáctica de la Geometría. En: Un paseo por la Geometría. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4945319.pdf

Nivel 3: Ordenación o clasificación. Los estudiantes describen las figuras a partir de su forma, definen conceptos y tipos de figuras, y pueden realizar clasificaciones inclusivas a partir de las propiedades de dichas figuras. También, pueden establecer relaciones entre las propiedades de las figuras. Además, a partir de unas propiedades, deducen otras y pueden comprender una demostración explicada, aunque no la pueden desarrollar solos ni son capaces de entender claramente su estructura formal.

Por ejemplo, a partir de las figuras anteriores reconocen que hay figuras con lados paralelos, el sentido de perpendicularidad y su relación con la medida de los ángulos, que todo cuadrado es un rombo pero no todo rombo es un cuadrado, etc.

Nivel 4: Deducción formal. Los estudiantes manejan las propiedades de las figuras en un contexto formal. Asimismo, pueden construir demostraciones mediante razonamientos deductivos y justificarlas. Este razonamiento y otros de nivel superior surgen, generalmente, en la secundaria.

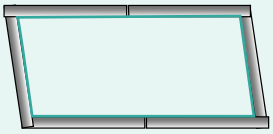
Proponga actividades con objetivos muy claros y gradúe su complejidad.

Trabaje primero actividades sencillas de exploración con objetos concretos. Permita que los estudiantes representen figuras y formas con palitos, clips, cañitas, plastilina, entre otros, para que descubran sus propiedades. Tenga en cuenta que la transición de un nivel de razonamiento al siguiente no es un proceso natural ni espontáneo, sino que se da dentro de un proceso de enseñanza y aprendizaje. Este debe tener una intención clara que busque asegurar que todos los estudiantes adquieran gradualmente nuevos conceptos y estructuras mentales. Motive a los estudiantes a describir y explicar sus observaciones y descubrimientos; a analizar las características que observan y a compartir en clase sus deducciones. Es importante consolidar los conocimientos, gradualmente, con actividades cada vez más complejas. Cada nivel de razonamiento tiene un lenguaje propio que se adquiere progresivamente y se expresa con distintas representaciones.

- Concreta. Se manifiesta a partir de las percepciones sensoriales de los estudiantes.
- Gráfica. Empieza siendo espontánea y se formaliza con el empleo de instrumentos.
- Verbal. Comunica sus observaciones, asociaciones y procesos.
- Formal. Utiliza términos matemáticos (vértice, perímetro, perpendicular, simétrico, etc.) y expresiones simbólicas.

En segundo grado de primaria, por ejemplo, los estudiantes pueden expresar la medida del contorno de una figura con la cantidad de palitos que la bordean. Observe.

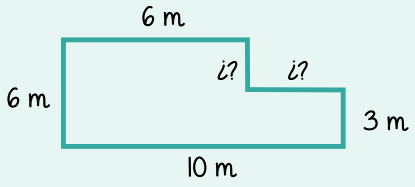
¿Cuántos palitos son necesarios para completar todo el contorno de esta figura?



Para solucionar esta tarea, es suficiente un razonamiento que corresponde al nivel 1: visualización o reconocimiento, que en este caso se expresa en un conteo de palitos.

Teniendo claro que el centro no está en el cálculo de medidas, si no en el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico presentados, en cuarto grado, resulta sencillo para los estudiantes calcular el perímetro de figuras en las que todas las medidas de los lados están explícitas. Pero aumenta la dificultad si el estudiante debe establecer relaciones entre los elementos para completar las medidas faltantes. Observe.

¿Cuánto mide el contorno de esta figura?



En esta tarea, no es suficiente el nivel de razonamiento de visualización. El estudiante requiere un nivel 2: análisis, para relacionar los datos y llegar a la respuesta.

La dificultad de una tarea es mayor si el estudiante debe relacionar propiedades, como en la tarea del perímetro (página 24), en la cual solo se conoce la medida (12 m) de un lado de un cuadrado y se pide calcular el perímetro. Se debe deducir que, por tratarse de un cuadrado, sus cuatro lados miden igual y la noción de perímetro define la operación a usar.

Generalmente, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en relación a todos los objetos geométricos. Es decir, puede encontrarse en el nivel 3: clasificación, respecto a los cuadrados y en el nivel 1: visualización, respecto a los cubos. Es necesario pasar por todos los niveles de razonamiento al abordar un nuevo objeto matemático.

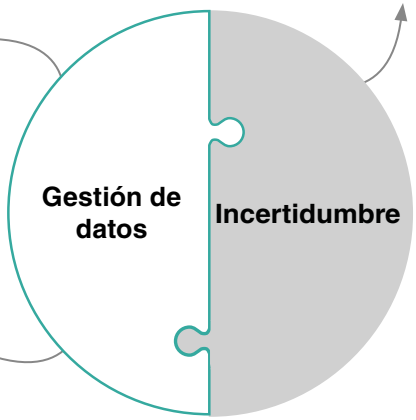
Competencia **Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre**

Recopilación y procesamiento de datos

- Recolectar datos cualitativos y cuantitativos discretos
- Registrar datos en tablas
- Representar e interpretar características y comportamientos de datos: tablas, pictogramas y gráfico de barras

Análisis de situaciones de incertidumbre

- Expresar la ocurrencia de un suceso
- Predecir usando nociones: seguro, más probable, menos probable e imposible



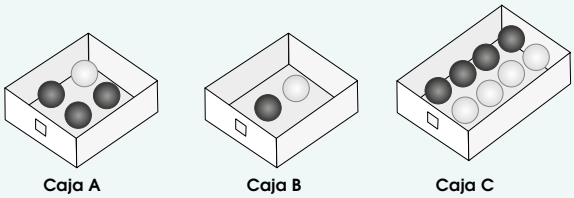
Interpretación de datos

- Interpretar tablas, y gráficos estadísticos y tomar decisiones a partir de ello
- Interpretar la moda y la media aritmética como punto de equilibrio

Hallazgo en la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Los estudiantes evidencian poca comprensión del significado intuitivo de probabilidad. Esto se observa en el análisis de la siguiente tarea.

Debes sacar, sin mirar, una pelota negra de una caja. ¿Qué caja te da mayor posibilidad de lograrlo?



- [x] a Caja A.
- b Caja B.
- c Caja C.
- d Cualquiera.

Competencia: Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

Capacidad: Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

Conocimiento: Noción intuitiva de probabilidad

Nivel: Satisfactorio

Respuesta correcta: a. Esta alternativa fue elegida por el 50,8 % de los estudiantes evaluados.

Logros de los estudiantes

Para resolver correctamente esta tarea, los estudiantes deben comprender la posibilidad que ocurra una situación deseada y compararla con otras. Probablemente, los estudiantes emplearon una de las siguientes estrategias, las cuales evidencian la comprensión del significado intuitivo de probabilidad, dando como respuesta la alternativa a.

- Usa la noción de posibilidad al comparar las partes.

  En la caja A hay más pelotas negras que blancas. Por tanto, hay mayor posibilidad de sacar una pelota negra.
  En la caja B y C hay igual cantidad de pelotas negras y blancas. Por eso, la posibilidad de sacar una pelota negra o blanca es la misma en cada caja.

- Usa la noción intuitiva de probabilidad.

  En la caja A, 3 de las 4 pelotas son negras. Es más de la mitad. ✓
  En la caja B, 1 de las 2 pelotas es negra. Es exactamente la mitad. ✗
  En la caja C, 4 de las 8 pelotas son negras. Es exactamente la mitad. ✗

Dificultades encontradas

Los estudiantes que marcaron las otras alternativas, muestran interpretaciones inadecuadas de la noción de posibilidad. A continuación, se presentan los procedimientos que probablemente emplearon estos estudiantes.

- Compara la cantidad de pelotas negras que hay en cada caja y escoge la que tiene mayor cantidad de pelotas negras.

  En la caja A hay 3 pelotas negras.
  En la caja B hay 1 pelota negra.
  En la caja C hay 4 pelotas negras (son más).

Respuesta incorrecta: c. Esta alternativa fue elegida por el 26,6 % de los estudiantes evaluados.

- Interpreta textualmente la situación.

  En la caja B, hay mayor posibilidad de sacar una pelota negra porque solo hay una.
  En las otras cajas, hay más pelotas negras.

Respuesta incorrecta: b. Esta alternativa fue elegida por el 14,3 % de los estudiantes evaluados.

- Atiende solo a la noción de posibilidad.

  De todas las cajas es posible sacar una pelota negra.

Respuesta incorrecta: d. Esta alternativa fue elegida por el 6,9 % de los estudiantes evaluados.

Sugerencias para trabajar probabilidades en el aula

El interés de los estudiantes por los juegos de distinto tipo, la posibilidad de ocurrencia de eventos en el día a día y otras situaciones, brindan oportunidad de tener un acercamiento al concepto de la probabilidad de un suceso en situaciones cotidianas y cercanas a los estudiantes, esto se desarrolla, gradualmente, desde las propias experiencias del estudiante a partir de los primeros grados de la escolaridad.

Desarrolle gradualmente el concepto intuitivo de probabilidad.

– En primer y segundo grado, el estudiante debe expresar la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de "posible" o "imposible" y explicar su respuesta.

  Es posible que venga al colegio con zapatillas porque a veces juego fútbol.
  Es imposible que crezcan plumas en mi cuerpo porque no soy un ave.

– Luego, en tercer y cuarto grado, el estudiante puede expresar esta ocurrencia de sucesos usando otras nociones, es así que incluye la noción de "seguro". De esta forma, se irá construyendo el significado intuitivo de probabilidad. Por ejemplo:

  Es seguro que después del día llega la noche.

  Veamos una tarea que se puede trabajar en el aula con material concreto.

  Prepare una bolsa con estrellas blancas y grises e invite a los estudiantes a sacar, sin mirar, una de ellas. Luego, pida que registren el color de la estrella en una tabla y regresen la estrella a la bolsa. Pídales que repitan este proceso varias veces. A partir de esta experiencia, proponga la siguiente situación.

  Diana va a decorar una tarjeta y usará una de estas estrellas. ¿Qué podemos afirmar acerca del color de la estrella que usará Diana?

  Los estudiantes pueden dar enunciados con las expresiones: “seguro", "posible" o "imposible”. Por ejemplo:

  Es posible que Diana use una estrella gris.
  Es imposible que Diana use una estrella roja.
  Es posible que Diana use una estrella blanca.
  Es seguro que Diana use una estrella.

El estudiante **comunica** su comprensión de los conceptos probabilísticos.

Asimismo, los estudiantes pueden evaluar la veracidad de algunas afirmaciones dadas. Por ejemplo:

Es seguro que Diana use una estrella gris.
Falso, puede usar una gris o una blanca.

Es imposible que Diana use una estrella roja.
Cierto, no hay estrellas rojas para usar.

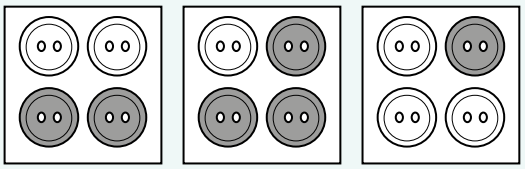
Es probable que Diana use una estrella azul.
Falso, solo puede usar una estrella blanca o gris.

Es imposible que Diana use una estrella blanca.
Falso, sí puede usar una estrella blanca.

A partir de la experimentación, el estudiante **analiza** enunciados y justifica por qué son correctos o no.

– También, a partir de tercer grado el estudiante puede comparar la ocurrencia de sucesos expresados a partir de afirmaciones como “tiene mayor posibilidad” o “tiene menor posibilidad”. Por ejemplo:

Ana, Beto y Caro tienen estas cajas con botones. Ellos dicen: “Gana el juego el que saque de su caja, sin mirar, un botón de color blanco”. ¿Quién tiene mayor posibilidad de ganar?



Ana Beto Caro

Los estudiantes, en grupo, experimentarán los resultados de una situación aleatoria. Para ello, sacarán un botón de cada caja, por lo menos 30 veces, y registrarán sus resultados en una tabla. Luego, pregúnteles: "¿de qué caja salió más veces un botón blanco? ¿Por qué habrá ocurrido esto?" Posteriormente, pida a cada grupo que identifique las diferentes posibilidades de ganar con cada caja. Algunas respuestas posibles serían que Caro tiene mayor posibilidad de ganar, porque tiene más botones blancos que grises; que Ana tiene igual posibilidad de ganar o perder, porque tiene igual cantidad de botones blancos y grises; y que Beto tiene menor posibilidad de ganar, ya que tiene menos botones blancos que grises.

Consolide la comprensión de la noción de probabilidad.

En la tarea anterior, la cantidad total de botones es igual en todas las cajas. En cuarto grado, se espera que los estudiantes puedan resolver tareas con mayor dificultad, como la tarea de la caja con las pelotas negras y blancas (página 29) en la que es diferente la cantidad de elementos que hay en cada caja. Esta tarea involucra la comprensión de la noción de probabilidad, la comparación de la posibilidad de un suceso y el uso de diversas estrategias de solución. Por ello, es necesario trabajar en el proceso de construcción del concepto de probabilidad presentando diversas situaciones, con variedad de material concreto, graduando el número de objetos para que siempre se pueda verificar los resultados. Esto permitirá abordar la noción de probabilidad en todos sus aspectos y fortalecer el proceso de retroalimentación con los estudiantes que lo requieren para garantizar el logro de los aprendizajes.

Al acercarse a estas nociones a través de la manipulación en experiencias concretas orientadas por el docente, los estudiantes estarán preparados para realizar el cálculo de la probabilidad de un evento en el siguiente ciclo.

7. Formulación de problemas en el aula: sugerencias pedagógicas

Así como la resolución de problemas desarrolla las competencias matemáticas en los estudiantes, la formulación de problemas también lo hace. Las actividades escolares de formulación promueven en los estudiantes la creatividad y la flexibilidad de su pensamiento en relación a las competencias matemáticas, por ello, es importante generar actividades en las que el estudiante formule problemas. El *Informe para docentes de la ECE 2016*[3] describió los diversos tipos de situaciones para la formulación de problemas propuestas por Fernández que ayudarán a los docentes a propiciar estas prácticas de formulación en los estudiantes.

A continuación, se muestra un ejemplo de la ECE 2018 sobre una tarea de estructuración, como las descritas por Fernández, en la cual los estudiantes deben crear un problema a partir de dos condiciones: la respuesta debe ser 20 personas y para resolver el problema se debe usar una multiplicación.

Crea un problema que cumpla con lo siguiente:

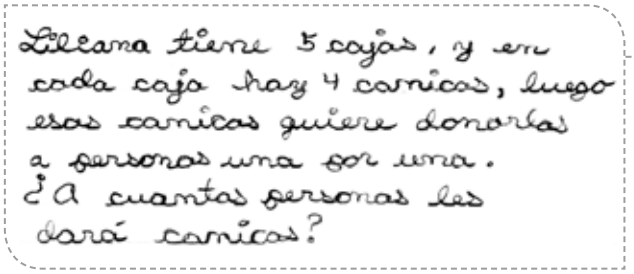
- Que se resuelva con la operación 5 x 4
- Que la respuesta sea 20 personas

Competencia: Resuelve problemas de cantidad.
Capacidad: Traduce cantidades a expresiones numéricas.

Para resolver esta tarea, el estudiante debe comprender la estructura multiplicativa para darle un significado en una situación que le permita establecer relaciones entre las condiciones dadas.

Los estudiantes que se enfrentan exitosamente a este tipo de tareas, evidencian los logros que han alcanzado respecto a las nociones matemáticas involucradas que han trabajado en clase, las habilidades que han adquirido para usar su conocimiento matemático, su manera de razonar y su comprensión de los conceptos matemáticos.

Observe las siguientes respuestas de los estudiantes.


Liliana tiene 5 cajas, y en cada caja hay 4 canicas, luego esas canicas quiere donarlas a personas una por una. ¿A cuantas personas les dará canicas?

El estudiante propone un problema multiplicativo de proporcionalidad simple del tipo varios grupos de una misma cantidad.

3 Ministerio de Educación del Perú. (2016). ¿Qué logran los estudiantes en Matemática? 2.° y 4.° grados de primaria. Lima: Ministerio de Educación del Perú. Pp. 29. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016.pdf

En el bus ⓐ hay 5 personas. Mientras que en el bus ⓑ hay el cuadrúple de personas que hay en el bus ⓐ.
¿Cuantas personas hay en el bus ⓑ?

El estudiante propone un problema multiplicativo de comparación (el doble de, el triple de, la mitad de, etc.).

Ambas respuestas son correctas y cumplen con las dos condiciones solicitadas. Sin embargo, los estudiantes han usado dos significados de multiplicación distintos para abordar la multiplicación. Estas respuestas de los estudiantes, permiten al docente observar qué tipo de estructuras multiplicativas han interiorizado y cuáles no, con la finalidad de enfatizar en el proceso de retroalimentación aquellas estructuras que se requieran.

Por otro lado, hay respuestas que muestran un nivel inicial de comprensión que tiene el estudiante respecto a la noción que se está trabajando. Observe el siguiente ejemplo.

A una fiesta vinieron 5 personas luego otros 5 despues 5 más finalmente llegaron otros 5, ¿Cuantas personas vinieron a la fiesta en total

El estudiante está evidenciando su comprensión de la noción de multiplicación como suma reiterada de una misma cantidad, logro esperado en el ciclo III.

Se espera que en el ciclo IV, los estudiantes puedan plantear problemas multiplicativos de propocionalidad simple, ya sean del tipo repetición de una cantidad, varios grupos de una misma cantidad o la distribución de una cantidad en partes iguales. Esta respuesta muestra que, posiblemente, el estudiante aún no ha consolidado esta noción, pero está en camino a realizarlo. Es importante que proponga actividades en clase que permitan al estudiante consolidar dicha noción mediante diversas situaciones que presenten los diferentes significados de la multiplicación.

La formulación de problemas, así como muestran los logros que se van alcanzando en el proceso de aprendizaje de un concepto, evidencian también algunas de las dificultades que tienen los estudiantes en dicho proceso.

Por ejemplo, observe la siguiente respuesta.

en el mercado a una señora le regalaron 5 pescados y ella compró 4 pescados y la señora lo multiplicó a multiplicarlo 5x4 y le salió 20 por que 5x4=20

El estudiante evidencia conocer el algoritmo de la multiplicación, pero eso no es suficiente para crear una situación multiplicativa adecuada.

Para que los estudiantes comprendan los significados de las distintas estructuras multiplicativas[4], se debe dar oportunidades en clase para que formulen problemas y, luego, justifiquen el uso de los algoritmos en cada situación propuesta.

Considere que para facilitar la comprensión de las estructuras aditivas y multiplicativas de proporcionalidad simple, de comparación y de combinación, debe proponer una variedad de situaciones cercanas a la realidad de los estudiantes. Por ejemplo:

> Crea un problema que cumpla con las siguientes condiciones:
> - Susana lleva en su lonchera dos mandarinas
> - Que la respuesta sea "6 mandarinas".

Los estudiantes podrían proponer lo siguiente:

Susana trajo 2 mandarinas y Lorena trajo 4 mandarinas. ¿Cuántas mandarinas trajeron en total?	Susana lleva en su lonchera dos mandarinas, tres días de la semana. ¿Cuántas mandarinas llevó en la semana?

Estas respuestas evidencian la comprensión de los estudiantes de las nociones aditivas y multiplicativas relacionadas a los problemas que han propuesto.

¿Cómo trabajar la formulación de problemas en el aula?

Para trabajar la formulación de problemas en el aula proponga diversas situaciones considerando la gradualidad en la dificultad para el estudiante, con la finalidad de plantear retos que sean alcanzables por ellos. A continuación, se muestran algunos ejemplos, en los que se pide al estudiante formular problemas a partir de un mismo estímulo y con diferentes condiciones, que al aumentar en número o especificidad, irán haciéndose más complejas.

A partir de un estímulo

El requerimiento es crear un problema con la única condición de utilizar información del pictograma que se muestra. No se le solicita ninguna otra condición.

Con este tipo de situaciones, el estudiante desarrolla confianza y seguridad cuando empieza a formular problemas, porque se le da oportunidad de expresar su creatividad usando libremente sus conocimientos matemáticos.

Crea un problema con la información que observas en el siguiente gráfico.

4 Para conocer más acerca de situaciones de estructura multiplicativa, consultar Rutas del Aprendizaje. Matemática. Ciclo IV. Disponible en: http://www.minedu.gob.pe/rutas-del-aprendizaje/primaria.php

A partir de un estímulo y una respuesta dada

El requerimiento es crear un problema con dos condiciones: Usar información del pictograma que se muestra y dar como respuesta “4 helados”.

Con este tipo de situaciones, el estudiante establece la relación que hay entre los datos del pictograma y la respuesta que debe tener el problema. Además, reconoce que una misma respuesta se puede obtener a partir de diferentes situaciones propuestas (ver un ejemplo similar en el *Informe para docentes de la ECE 2016*[5]).

Crea un problema con la información que observas en el siguiente gráfico y cuya respuesta sea "4 helados".

A partir de un estímulo y una expresión matemática

El requerimiento es crear un problema con dos condiciones: se debe resolver con la operación 28 - 20 y se debe utilizar información del pictograma que se muestra.

Con este tipo de situaciones el estudiante distingue el problema de su resolución, y estructura mentalmente la relación que debe haber entre ellos. Además, reconoce el uso de las operaciones matemáticas como un instrumento para resolver el problema propuesto.

Crea un problema con la información que observas en el siguiente gráfico y que se resuelva con la operación 28 - 20.

Por todo lo mencionado, concluimos que las actividades de formulación de problemas son un recurso importante dentro del aula ya que permiten al docente lo siguiente.

- Evidenciar los aprendizajes logrados por los estudiantes.
- Identificar las dificultades y atender a ellas mediante una retroalimentación oportuna.

También aportan de manera significativa al desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes, debido a que permiten lo siguiente.

- Desarrollar diversos procesos cognitivos, entre ellos: identificar, comprender, relacionar y organizar información, situaciones y requerimientos, además, traducir y comunicar propuestas y conclusiones.
- Ofrecer un conjunto de actividades para que el estudiante desarrolle su creatividad, explore, realice conjeturas y anticipe resultados al cambiar alguna de las condiciones que se le planteen en cada tarea.
- Desarrollar nociones matemáticas relacionándolas a diversas situaciones y contextos.

5 Ministerio de Educación del Perú. (2016). ¿Qué logran los estudiantes en Matemática? 2.° y 4.° grados de primaria. Lima: Ministerio de Educación del Perú. Autor. Pp. 26-27. Disponible en: http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016.pdf

Para acceder a los resultados generales de la ECE,
puede ingresar al sitio web del Sicrece.

SICRECE

Sistema de Consulta de Resultados de Evaluaciones

http://sicrece.minedu.gob.pe

Si usted tiene alguna consulta o comentario sobre este informe, comuníquese con nosotros:

docente_ece2018@minedu.gob.pe **Telf. (01) 615-5840**

Visite nuestro sitio web:
http://umc.minedu.gob.pe

Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes
Ministerio de Educación
Calle Morelli 109, San Borja - Lima, Perú