

COMPETENCIA
APRENDIZAJE
PROBLEMAS
INTERPRETACIÓN
RAZONAMIENTO
HEURÍSTICAS
ANÁLISIS
COMPRENSIÓN
RETROALIMENTA
COMUNICACIÓN

Informe de evaluación de Matemática
en sexto grado - 2013

¿Qué logros de aprendizaje
en Matemática muestran los
estudiantes al finalizar la primaria?

COMPETENCIA
APRENDIZAJE
PROBLEMAS
INTERPRETACIÓN
RAZONAMIENTO
HEURÍSTICAS
ANÁLISIS
COMPRENSIÓN
RETROALIMENTA
COMUNICACIÓN

Informe de evaluación de Matemática
en sexto grado - 2013

¿Qué logros de aprendizaje
en Matemática muestran los
estudiantes al finalizar la primaria?



PERÚ

Ministerio
de Educación

Jaime Saavedra Chanduví

Ministro de Educación del Perú

Juan Pablo Silva Macher

Viceministro de Gestión Institucional

Flavio Figallo Rivadeneyra

Viceministro de Gestión Pedagógica

Jorge Mesinas Montero

Secretario de Planificación Estratégica

Liliana Miranda Molina

Jefa de la Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes

Informe de evaluación de Matemática en sexto grado - 2013 ¿Qué logros de aprendizaje en Matemática muestran los estudiantes al finalizar la primaria?

Redacción del informe:

Tulio Ozejo Valencia (Responsable)

Percy Merino Rosario

María Elena Marcos Nicho

Olimpia Castro Mora

Carlos Baca Pacheco

Melissa Castillo Medrano

Asesor:

Raimundo Olfos Ayarza (Chile)

Revisión del informe:

Liliana Miranda Molina

Tania Pacheco Valenzuela

Fernando Llanos Masciotti

Humberto Pérez León Ibañez

Corrección de estilo:

Martín Cuesta Escobedo

Diagramación:

Alejandra Palacios Pérez

© **Ministerio de Educación del Perú, 2016**

Calle del Comercio 193, San Borja. Lima, Perú.

Teléfono: 615-5800

www.minedu.gob.pe

Se autoriza citar o reproducir la totalidad o parte del presente documento, siempre y cuando se mencione la fuente.

En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva términos como “el docente”, “el estudiante” y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo) para referirse a hombres y a mujeres. Esta opción se basa en una convención idiomática y tiene por objetivo evitar las formas para aludir a ambos géneros en el idioma castellano (“o/a”, “los/las” y otras similares), debido a que implican una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión lectora.

Tabla de contenido

Introducción	09
1. La evaluación de Matemática en la EM	15
1.1 ¿Qué se entiende por Matemática?.....	15
1.2 ¿Cómo se evaluó en Matemática?.....	17
2. Resultados de Matemática en la EM	27
2.1 ¿Cómo se presentan los resultados?	27
2.2 ¿Cuáles son los resultados nacionales?	29
2.3 ¿Qué son capaces de hacer los estudiantes en cada nivel de logro?	30
3. Análisis de las dificultades de los estudiantes en Matemática y sugerencias para superarlas.....	57
3.1 Dificultades para conceptualizar y usar fracciones	58
3.2 Dificultades para interpretar y construir de patrones.....	73
3.3 Dificultades para identificar y aplicar propiedades básicas de formas bidimensionales (figuras planas).....	88
3.4 Dificultades para interpretar y construir gráficos estadísticos	103
3.5 Dificultades para formular problemas matemáticos.....	114
4. Desafíos	131
4.1 Potenciar las habilidades cognitivas de los estudiantes.....	131
4.2 Dar un tratamiento constructivo a los errores de los estudiantes	135
4.3 Involucrarse en procesos de formación continua que mejoren la labor profesional en el área de Matemática	139
Glosario	141
Bibliografía	144

Anexos	147
Anexo A. Tablas de especificaciones	149
Tabla A1. Matemática EM 2013. Cantidad de ítems por capacidad a evaluar.....	149
Tabla A2. Matemática EM 2013. Cantidad de ítems por organizador.....	149
Tabla A3. Matemática EM 2013. Cantidad de ítems por contexto.....	149
Anexo B. Tablas de resultados por niveles de logro según estratos y resultados nacionales	150
Tabla B1. Medida promedio y porcentaje de estudiantes según nivel de logro por sexo y lengua materna.....	150
Tabla B2. Medida promedio y porcentaje de estudiantes según nivel de logro en Matemática por gestión, área y característica.....	151
Tabla B3. Medida promedio y porcentaje de estudiantes según nivel de logro en Matemática para IE estatales según área y característica.....	153
Figura B1. Resultados nacionales por estrato en Matemática	154
Tabla B4. Porcentaje de estudiantes en el nivel Satisfactorio por región en Matemática.....	155
Figura B2. Porcentaje de estudiantes el nivel Satisfactorio por región en Matemática.....	156
Anexo C. Preguntas liberadas	157
Tabla C1. Cuadro resumen de las preguntas liberadas de Matemática de la Evaluación Muestral.....	157
Anexo D. Significados de la fracción.....	161
Tabla D1. Cuadro resumen de los significados de la fracción.....	161

Introducción

La Oficina de Medición de Calidad de los Aprendizajes (UMC) del Ministerio de Educación aplicó la Evaluación Muestral (EM) a una muestra representativa de estudiantes de sexto grado de primaria a nivel nacional¹ a fines del año 2013. Su objetivo fue recoger información sobre los logros de aprendizaje de las competencias comunicativas (lectura y escritura), matemáticas y ciudadanas para así retroalimentar a los distintos actores educativos y que estos puedan tomar decisiones informadas de acuerdo con sus funciones.

Los resultados de esta evaluación permitieron determinar cuánto se acercan los estudiantes que terminan el nivel primario a las expectativas planteadas en los documentos curriculares nacionales, además de reconocer los aciertos y las dificultades de los estudiantes en la prueba que podrían afectar sus posteriores logros de aprendizaje.

En la prueba de la EM, se evaluó Lectura, Escritura, Matemática y Ciudadanía, porque son aprendizajes que ofrecen a los estudiantes la oportunidad de desenvolverse en una sociedad en la que es necesario interactuar con una diversidad de material escrito cada vez más variado y complejo, resolver situaciones problemáticas del entorno, construir conocimiento científico, así como ejercer plenamente su ciudadanía en el marco de una sociedad democrática.

¹ La muestra abarcó 67 000 estudiantes de sexto grado de primaria provenientes de 3120 instituciones educativas del Perú.

El objetivo de este informe es analizar los resultados de esta evaluación, visibilizar los aciertos y dificultades de los estudiantes en la prueba y ofrecer algunas recomendaciones pedagógicas. A partir de esto se podría orientar las acciones de retroalimentación y de mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en Matemática. Asimismo, se aspira a que el análisis de los resultados de esta evaluación fomente la discusión curricular, pedagógica y metodológica sobre la enseñanza de la Matemática, ayude a mejorar la gestión pedagógica de las instituciones educativas, identificar las necesidades de capacitación docente y optimizar los programas de acompañamiento pedagógico.

El presente informe consta de cuatro capítulos. El capítulo 1 plantea cómo se conceptúa la Matemática escolar en esta evaluación y las razones por las que se evalúa; también se explicita el significado de la competencia matemática, cuáles fueron las capacidades evaluadas, los contenidos y los contextos en los que se presentan las preguntas propuestas en esta evaluación. En síntesis, este capítulo contribuye a que el lector se forme una idea clara sobre el modelo de evaluación y sobre la estructura de la prueba.

En el capítulo 2, se presenta los resultados de la evaluación a través de la clasificación de los estudiantes por niveles de logro. En cada uno de estos niveles de logro, se describe aquello que los estudiantes saben y pueden hacer en Matemática, de tal manera que se pueda interpretar adecuadamente los resultados de la evaluación. Además, cada nivel de logro se ilustra con algunas preguntas representativas.

En el capítulo 3, se analizan las dificultades que han tenido los estudiantes con las preguntas de la prueba a partir de los procesos involucrados en la resolución de una determinada tarea. El objetivo es que, el docente pueda comprender con mayor claridad por qué un estudiante acierta o falla una pregunta y cómo puede reorientar su trabajo en aula. Se complementa la descripción de cada tipo de dificultad de los estudiantes con una serie de sugerencias para afrontarlas.

En el capítulo 4, a partir de los resultados, se sugieren tres ámbitos de acción que podrían priorizar los docentes: potenciar las habilidades cognitivas de los estudiantes, dar un tratamiento constructivo a los errores que acompañan el aprendizaje de la matemática e involucrarse en procesos de formación continua. De esta manera, se pretende conseguir un impacto en los logros de aprendizaje de nuestros estudiantes en Matemática.

Este informe, en la parte final, presenta anexos que contienen información para quienes deseen ampliar su conocimiento de esta evaluación. Esta sección incluye las tablas de especificaciones del instrumento aplicado; las tablas de resultados nacionales por estratos (escuelas públicas/privadas; rurales/urbanas; polidocentes completas/ multigrado y unidocentes; etc.) y por regiones según el nivel de logro; y la tabla con datos descriptivos de las preguntas liberadas de la prueba. Asimismo, dada su importancia pedagógica, se incluye una tabla que brinda información al docente acerca de los distintos significados de la fracción.

1.

La evaluación de Matemática en la EM

1. La evaluación de Matemática en la EM

Niños, adolescentes y adultos enfrentan situaciones como: clasificar frutos, interpretar un recibo para tomar decisiones al respecto, evaluar la conveniencia de adquirir un producto, participar en un juego digital, entre otras; estas exigen movilizar conocimientos, habilidades y actitudes matemáticas. Visto globalmente, el saber matemático se desarrolla a partir de la necesidad y actuación de las personas y las colectividades que buscan resolver situaciones problemáticas o crear nuevos productos y métodos que mejoren su forma de vida. Según esta perspectiva, la Matemática se crea constantemente, como lo sostiene Polya, (1969) quien señala que la Matemática es una disciplina de descubrimiento.

Apreciar los aprendizajes de la matemática en la escuela es importante. Las evaluaciones nacionales, como la EM, nos dan información valiosa al respecto, la que se complementa con la que el docente realiza periódicamente en cada aula.

1.1 ¿Qué se entiende por Matemática?

En este informe abordamos la dimensión educativa de la Matemática, en particular aquella que usualmente se denomina matemática escolar. Una expresión esencial del aprendizaje de cada estudiante es la competencia matemática, la que se define como:

Un saber actuar **deliberado y reflexivo** que selecciona y moviliza una diversidad de **saberes, habilidades, conocimientos matemáticos, destrezas, actitudes y emociones**, de tal manera que permita plantear y resolver situaciones problemáticas reales o de contexto matemático, elaborar procesos de razonamiento, demostración y comunicación matemática que involucran conocimientos referidos a números y operaciones, cambio y relaciones, geometría; y, estadística y probabilidad.

Esta competencia enfatiza el saber actuar. Requiere que los conocimientos y los recursos involucrados sean funcionales, es decir, que trasciendan el conocimiento en sí mismo, constituyéndose en herramientas para la toma de decisiones en diversidad de escenarios: recreacionales, económicos, culturales, políticos, entre otros.

La competencia matemática enfatiza el saber actuar. Esto implica que los conocimientos sean usados como herramientas para la toma de decisiones y la actuación de cada persona en distintos escenarios.

La funcionalidad de conocimientos matemáticos exige que la comprensión teórica adquiera un sentido constructivo y aplicado a las necesidades e intereses de los estudiantes.

La competencia matemática es un saber actuar deliberado que exige considerar los valores, principios o convicciones que guían dicha actuación.

La resolución de problemas potencia las oportunidades para establecer conexiones entre la Matemática y la vida y es un medio para vivenciar su uso funcional.

Esta característica de funcionalidad no restringe la valoración de la comprensión teórica; antes bien, exige que esta adquiera un sentido constructivo, aplicado, esclarecedor. De ahí la gran responsabilidad de las instituciones educativas y, en particular, de los docentes para identificar aquello que es relevante en la educación matemática de los estudiantes, atendiendo a sus necesidades y a sus intereses actuales y a los que previsiblemente enfrentarán a lo largo de su vida.

Afirmar que el saber actuar es deliberado u orientado y que involucra seleccionar y movilizar una diversidad de habilidades, exige considerar los valores, principios o convicciones que guían o sustentan dicha actuación. Saber actuar exige tener la voluntad de hacerlo y, por cierto, hacerlo con un propósito o intención.

De acuerdo con Escamilla (2008), como caracterización esencial de la competencia, se puede afirmar que es un “saber que mira a la acción, pero que ha de estar sólidamente basado en conocimientos teóricos e inspirado en principios y valores” (p.30).

Por otra parte, desarrollar la competencia matemática presupone priorizar los procesos de construcción, principalmente cognitivos, en interrelación con los contenidos característicos de la Matemática. Así, la resolución de problemas, el razonamiento y demostración, y la comunicación matemática se desarrollan abordando contenidos referidos a números y operaciones, a cambio y relaciones, a geometría, y a estadística y probabilidad, en situaciones diversas.

Esta concepción de competencia es congruente con el enfoque de resolución de problemas vigente en nuestro sistema educativo. La resolución de problemas es reconocida como la actividad principal en el desarrollo de la competencia matemática. Asumir este enfoque potencia las oportunidades de los estudiantes para que establezcan conexiones entre la Matemática y la vida. El desafío de enfrentar situaciones problemáticas, que en su mayoría simulan situaciones sociales relevantes, es un poderoso medio para que los estudiantes vivencien el uso funcional de esta disciplina. En este sentido, se sostiene que plantear y resolver problemas posibilita la conexión de las ideas matemáticas con intereses y experiencias del estudiante (Ministerio de Educación del Perú [Minedu], 2009).

1.2 ¿Cómo se evaluó en Matemática?

Se consideraron tres componentes interrelacionados: capacidades, contenidos y contextos; y tuvo como referente curricular principal al Diseño Curricular Nacional (DCN) vigente en el 2013.²

Capacidades

Las capacidades evaluadas tienen una naturaleza cognitiva. Se abordan tres capacidades inherentes al aprendizaje de la Matemática: Resolución de problemas, Comunicación matemática, y Razonamiento y demostración, establecidas en el DCN.

a. Resolución de problemas

Capacidad que el estudiante evidencia cuando usa sus conocimientos matemáticos, de manera flexible, para enfrentar una problemática que requiere comprenderla, determinar estrategias para su resolución, tomar decisiones al efectuarlas y reflexionar sobre la pertinencia de su respuesta. De esta manera, individualmente o en colaboración, desarrolla formas de pensar, perseverancia y confianza.

La resolución de problemas desarrolla formas de pensar, perseverancia y confianza para enfrentar nuevas situaciones.

Veamos el siguiente ejemplo.

Martha recibió S/. 50 para comprar 10 cuadernos de 100 hojas. Un encarte de un supermercado promociona 20% de descuento en todos los productos y consigna como precio normal de un cuaderno S/. 7,99. Por otra parte, en una librería le ofrecen el mismo tipo de cuaderno a S/. 5,50. ¿Dónde le conviene efectuar la compra?

Al enfrentar esta situación, Martha podría proyectar dos escenarios de compra, efectuar los cálculos numéricos correspondientes (incluyendo el uso del porcentaje y la posibilidad de la aproximación a un valor entero), comparar los resultados y decidir la opción que más le conviene. Adicionalmente, para tomar la decisión final consideraría que el dinero con que cuenta no le permitirá adquirir todos los cuadernos requeridos.

² También se tomaron en cuenta los Mapas de progreso, las Rutas de Aprendizaje y los textos escolares.

En la formulación de problemas se evidencian las concepciones y creencias sobre lo que es un problema, las habilidades y los conocimientos de los estudiantes.

Situaciones como esta originan problemas que exigen una actuación competente por parte de cada estudiante.

La solución de la prueba de matemática demanda principalmente la resolución de problemas de modo que permite una valoración del desarrollo de esta capacidad de forma más detallada. Además, el hecho de incluir preguntas de formato abierto³ posibilita determinar aspectos específicos que inciden en los logros o en las dificultades. Asimismo, los distintos niveles de complejidad de las preguntas y la diversidad de formas en su presentación (enunciado verbal, representación gráfica o simbólica, o una combinación de estas) posibilitan una buena aproximación a los logros de los estudiantes de sexto grado.

En la prueba también se indagó por el planteamiento o formulación de problemas por parte de los estudiantes. Al abordar esta tarea al igual que con la resolución de problemas, ellos recurren a sus concepciones y creencias acerca de lo que es un problema, así como a habilidades y a conocimientos específicos que les permitan una formulación acorde con las condiciones dadas. De esta manera, en la formulación se hacen evidentes las elecciones realizadas por el estudiante al redactar su problema, es posible identificar sus creencias, su confianza en el uso de determinadas nociones y procedimientos matemáticos, entre otros; siendo usual que tengan distintas aproximaciones, intuitivas o formales. Por ello la formulación de problemas es inherente a la capacidad de resolución de problemas.

b. Comunicación matemática

La comunicación matemática se desarrolla fundamentalmente al hablar, escribir, leer, escuchar y graficar. En ella, se recurre, con diverso grado, al uso de un lenguaje especializado.

Capacidad que se evidencia cuando el estudiante expresa, comparte y aclara ideas matemáticas, que llegan a ser objeto de representación, reflexión, discusión y perfeccionamiento. Esta se desarrolla fundamentalmente al hablar, escribir, leer, graficar y escuchar, recurriéndose, en diverso grado, al uso de un lenguaje especializado, preciso, el cual otorga permanencia y uso compartido, público, a la construcción y a la expresión de conceptos, modelos y estructuras matemáticas.

Así, por ejemplo, si una niña tiene el encargo de ir de su casa a un lugar ubicado a 1 km, imagina la realización de la tarea y se enfrenta a varias interrogantes, recurriendo generalmente a la

³ A estas preguntas también se les denomina de respuesta construida o, coloquialmente, "preguntas de desarrollo".

ayuda de personas cercanas a ella. La localización del lugar al cual debe dirigirse, los posibles trayectos y el espacio recorrido, el tiempo aproximado que duraría son algunos aspectos con contenido matemático que exigen el uso de representaciones inherentes al lenguaje característico de esta ciencia, como pueden ser imágenes mentales, esquemas o diagramas como los croquis o planos de coordenadas por ejemplo. De manera similar, en situaciones de comunicación con otras personas, “aprenden a ser más claros, convincentes y precisos en el uso del lenguaje matemático” (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000b, p.5).

En la prueba, se plantearon situaciones que demandan comunicar, para expresar, interpretar y valorar conocimientos matemáticos con pertinencia, coherencia y claridad.

c. Razonamiento y demostración

Es una capacidad que se desarrolla en el plano del pensamiento abstracto, e involucra relaciones, operaciones y objetos matemáticos para obtener un resultado nuevo a partir de algo ya conocido. Dos formas fundamentales son: el razonamiento heurístico, que juega un papel importante en la invención y el progreso de la Matemática, y el razonamiento deductivo, esencial en su construcción y que le confiere a esta una apariencia formal, deductiva.

A su vez, la demostración matemática es una manera formal, rigurosa, de expresar el razonamiento deductivo (NCTM, 2000a).

Desarrollar ideas a partir de la exploración de situaciones, proponer conjeturas matemáticas, experimentar y justificar hallazgos, y elaborar cadenas cortas de razonamiento deductivo, permite a los estudiantes enfrentar, reflexivamente, desafíos en la vida diaria que exigen un razonamiento organizado, justificaciones o argumentación al emitir un juicio.

Consideremos un ejemplo en el cual algunos estudiantes exploran la adición de números naturales pares o impares.

¿Qué clase de número resulta al adicionar dos números pares? ¿Qué clase de número resulta al adicionar dos números impares? ¿Qué clase de número resulta al adicionar un número par con un número impar?

El razonamiento matemático involucra el manejo de relaciones, operaciones y objetos matemáticos y se desarrolla en situaciones que buscan obtener un resultado nuevo a partir de algo ya conocido. La demostración matemática es la manera rigurosa de expresar el razonamiento deductivo.

Para responderlas, podrían explorar con casos particulares, determinar si hay alguna característica constante en los casos estudiados y establecer una generalización para dar la respuesta. Así, si establecieran que al sumar dos números impares siempre resulta un número par, bastaría un solo caso (un contraejemplo) en el cual la suma de dos números impares resulte impar para que la generalización sea inválida.

En la prueba aplicada se plantearon tareas que pueden ser abordadas a partir de razonamientos deductivos y, sobre todo, apelando al razonamiento heurístico; pues se trata de situaciones que sugieren, de manera intuitiva, objetos o nociones matemáticas. Se propusieron tareas que demandan establecer cadenas cortas de razonamiento para identificar o interpretar relaciones, o plantear suposiciones y conjeturas, evaluándolas mediante contraejemplos. Así, sin llegar al nivel de los formalismos asociados a una demostración, el abordaje de las situaciones sí involucra algunas de sus características importantes como: producción a partir de la información inicial, regulación y control, o diferentes niveles de abstracción.

Contenidos

Las capacidades y contenidos están indisolublemente relacionados. No se pueden resolver problemas sin usar contenidos matemáticos y todo contenido matemático necesita del razonamiento y la comunicación para su desarrollo y comprensión.

Constituyen el cuerpo de conocimientos que sustenta la Matemática. Se diferencian de las capacidades presentadas, las cuales en esencia son procesos cognitivos. Sin embargo, capacidades y contenidos están relacionados, como lo evidencia la historia de la Matemática (Boyer, 1992). Este vínculo también lo destaca el NCTM: “No se pueden resolver problemas sin comprender y usar contenidos matemáticos. El conocimiento geométrico requiere razonamiento. Los conceptos algebraicos pueden analizarse y comunicarse por medio de representaciones” (2000a, pp.7-8).

En la Evaluación se han considerado cuatro organizadores de contenidos: Números y operaciones, Cambio y relaciones, Geometría, y Estadística y probabilidad. Los conocimientos relevantes en cada uno de ellos son los mostrados en la siguiente página.

a. En Números y operaciones

Los números naturales, decimales y fraccionarios, sus formas de representación, su uso en situaciones de medida; la construcción del sistema de numeración decimal; el significado y la utilización de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, con las relaciones entre estas, así como a la estimación; asimismo, los porcentajes.

La solución de la prueba de matemática demanda principalmente el manejo de conocimientos referidos a este organizador. Esto se justifica porque, desde edades tempranas, los estudiantes construyen sus aprendizajes del número natural, de las fracciones y de los decimales a partir de los usos que le dan en las situaciones cotidianas, reconociendo sus significados diversos, las distintas formas de representación y las operaciones y relaciones que se establecen entre ellos. Además, consolidan los aprendizajes referidos a la estructura del Sistema de Numeración Decimal, proceso favorecido por el uso social del número desde edades tempranas.

b. En Cambio y relaciones

La descripción y caracterización de regularidades y patrones, el modelamiento de las relaciones cuantitativas entre dos magnitudes en distintas situaciones de la vida real (utilizando desde representaciones personales hasta expresiones simbólicas como las igualdades, las desigualdades y las equivalencias) y el análisis del cambio, proporcional u otro, en contextos diversos.

c. En Geometría

La caracterización de la forma de los objetos expresados en figuras planas y cuerpos geométricos, sus elementos y propiedades, sus atributos medibles como perímetro, superficie y volumen. Asimismo, la clasificación de formas y magnitudes; su posición y su desplazamiento en sistemas de referencia.

d. En Estadística y probabilidad

Procesamiento, representación e interpretación de datos, transformándolos en información (gráficas y medidas representativas como la moda o la media aritmética), así como el análisis de las situaciones de incertidumbre orientado a la toma de decisiones usando el enfoque clásico de probabilidad.

Contextos

Aluden a las condiciones que determinan la situación propuesta; y pueden presentar o no conexiones con la realidad. Pueden ser tipificadas, respectivamente, como contexto real (extra matemático) o disciplinar (intra matemático).

a. Contexto real (extra matemático)

Es una situación que en su estado inicial se refiere a la realidad o la simula, de modo que intervienen relaciones o procedimientos con objetos tangibles, concretos. En la prueba, las situaciones fueron elegidas considerando su relevancia social. Enfrentar actividades con estas características requiere su transformación en un problema propio del mundo matemático para llegar a los resultados matemáticos requeridos (estos deben ser interpretados, en esta fase, en el marco de la situación planteada) y, finalmente, exige retornar al mundo real para verificar la conveniencia y la viabilidad de la respuesta hallada. Es decir, las condiciones de partida, el proceso de cambio y el estado final se expresan o realizan con intervención de objetos, relaciones o procedimientos concretos, del mundo real. Esto ocurre, por ejemplo, en el siguiente problema.

Los contextos determinan si la situación presenta o no conexiones con la realidad. En el primer caso es un contexto real o extra matemático y, en el segundo, se trata de un contexto disciplinar o intra matemático.

Hacia junio de 2014, una asociación de productores de paltas ha cosechado 2,4 toneladas de palta, cantidad que representa el 40% de lo proyectado para ese año. ¿Cuántas toneladas más de paltas deberían cosechar en lo que queda del 2014, para alcanzar lo proyectado para ese año?

La situación inicial involucra objetos tangibles (paltas), así como relaciones económicas (lo proyectado en la cosecha para el 2014). Para hallar cuánto más deben cosechar el 2014, se abstrae valores numéricos; así, siendo 2,4 equivalente al 40% de lo proyectado cosechar, se debe determinar el valor equivalente al 60% para completar la cantidad total. En esta fase se opera en el mundo matemático con números, razones (porcentajes) y manejo de estructuras aditivas para hallar la cantidad solicitada, proceso que debe interpretarse en relación con la situación de partida, propia del mundo real. Finalmente,

se analiza la viabilidad de la respuesta obtenida (3,6 toneladas de paltas como cosecha proyectada) para dar por resuelto el problema; y se constata que en el estado final intervienen objetos y relaciones del mundo real.

b. Contexto disciplinar (intra matemático)

Es una situación en la cual las condiciones de partida, el proceso de cambio y el estado final se expresan o realizan exclusivamente dentro del mundo abstracto, de objetos, relaciones y operaciones matemáticas.

Así ocurre cuando, por ejemplo, se brinda a los estudiantes un tangram, un geoplano, ligas, hojas, reglas, lápices, borradores y se le pide lo siguiente:

Con algunos de estos materiales se forma tres cuadriláteros distintos, y en cada uno calcula la suma de sus ángulos interiores.

Luego explica si esto se puede extender a cualquier cuadrilátero.

Recuerda que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180° .

Se aprecia que las condiciones de partida involucran a objetos pedagógicos del área de matemática, objetos y operaciones matemáticas: tangram, geoplano, triángulos, cuadriláteros, ángulos interiores y adición de la medida de ángulos. En cuanto a la resolución, el estudiante puede elegir con qué y cómo trabajar. Así puede formar cuadriláteros con los triángulos del tangram y emplear la premisa dada (la suma de los ángulos interiores es 180°), optar por dibujar y doblar o trazar un cuadrilátero en el geoplano y ubicar su diagonal para dividirlo en dos triángulos contiguos y emplear la premisa dada. Luego, a partir de los ángulos interiores de los dos triángulos, se puede componer la suma de los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero. Finalmente, se concluye que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero es 360° , un resultado que involucra solo objetos y relaciones abstractas, matemáticas.

El enfoque de la Matemática asumido en la EM, destaca el uso funcional de la Matemática y, por tanto, privilegia los contextos de tipo real, lo cual exigió que las preguntas planteadas consideren escenarios y situaciones relevantes familiares para los estudiantes peruanos. Entre los propósitos de seleccionar problemas con contexto real destacan los siguientes: vincular los conocimientos evaluados con sus saberes previos (muchas veces no formales), facilitar recursos de tipo práctico que puedan constituirse en alternativas al uso de saberes académicos, formales, y visualizar la utilidad de los conocimientos y de las capacidades matemáticas en su vida cotidiana extraescolar. El énfasis puesto en tales problemas no desmerece la conveniencia de formular, resolver y evaluar problemas de contexto disciplinar, matemático.

En las preguntas que conformaron la prueba se emplearon distintos formatos en los textos de las preguntas: continuos, discontinuos o mixtos. Un formato textual continuo está formado por oraciones que, a su vez, pueden conformar párrafos. Por su parte, un formato textual discontinuo organiza la información mediante tablas, gráficos, diagramas o mapas. En tanto que un formato mixto combina un texto continuo con un texto discontinuo; por ejemplo, un artículo periodístico que combina párrafos con tablas y gráficos.

A modo de resumen, en la Tabla 1.1 se señalan las capacidades, los contenidos y los contextos evaluados.

Tabla 1.1. *Capacidades, contenidos y contextos, EM Matemática*

Capacidades	Contenidos	Contextos
<ul style="list-style-type: none"> • Resolución de problemas • Comunicación matemática • Razonamiento y demostración 	<ul style="list-style-type: none"> • Números y operaciones • Cambio y relaciones • Geometría • Estadística y probabilidad 	<ul style="list-style-type: none"> • Real (extra matemático) • Disciplinar (intra matemático)

Fuente: MINEDU-UMC. Marco de la Evaluación Muestral 2013

2.

Resultados de Matemática en la EM

2. Resultados de Matemática en la EM

En este capítulo, se explica cómo se informan los resultados en Matemática, qué son los niveles de logro y qué significa ubicarse en cada nivel. Se describen, además, los desempeños específicos de los estudiantes en cada uno de los niveles y se presentan los resultados nacionales en Matemática.

2.1 ¿Cómo se presentan los resultados?

Luego de la aplicación de la prueba, las respuestas de los estudiantes son procesadas mediante un modelo de medición denominado “modelo Rasch”. En este modelo, a cada estudiante se le asigna una medida (puntaje) que refleja su nivel de habilidad: a mayor medida, mayor habilidad.

Estas medidas posibilitan expresar los resultados de dos maneras: por medida promedio y por niveles de logro. La medida promedio es la media aritmética de todas las medidas individuales en un grupo de estudiantes. Por su parte, los niveles de logro describen lo que sabe y puede hacer un estudiante cuya medida está dentro de un determinado rango de habilidad. En este informe, básicamente se presentan los resultados por niveles de logro, debido a que permiten conocer con claridad la situación de los aprendizajes de los estudiantes en matemática.

De acuerdo con su medida individual, los desempeños de estudiantes son clasificados en cuatro niveles de logro: Satisfactorio, En proceso, En inicio y Previo al inicio, y los resultados, por grupo, se expresan en términos de cuántos estudiantes lograron ubicarse en cada nivel.

A continuación, se describen de manera general los niveles mencionados y se indican las medidas que determinan los puntos de corte de los distintos niveles en la prueba de Matemática:

Los resultados de la EM se expresan de dos maneras: Medida promedio, que es la media aritmética de las medidas individuales en un grupo de estudiantes. Niveles de logro, que describen lo que sabe y puede hacer un estudiante, clasificando los desempeños en cuatro grupos: Satisfactorio, En proceso, En inicio y Previo al inicio.

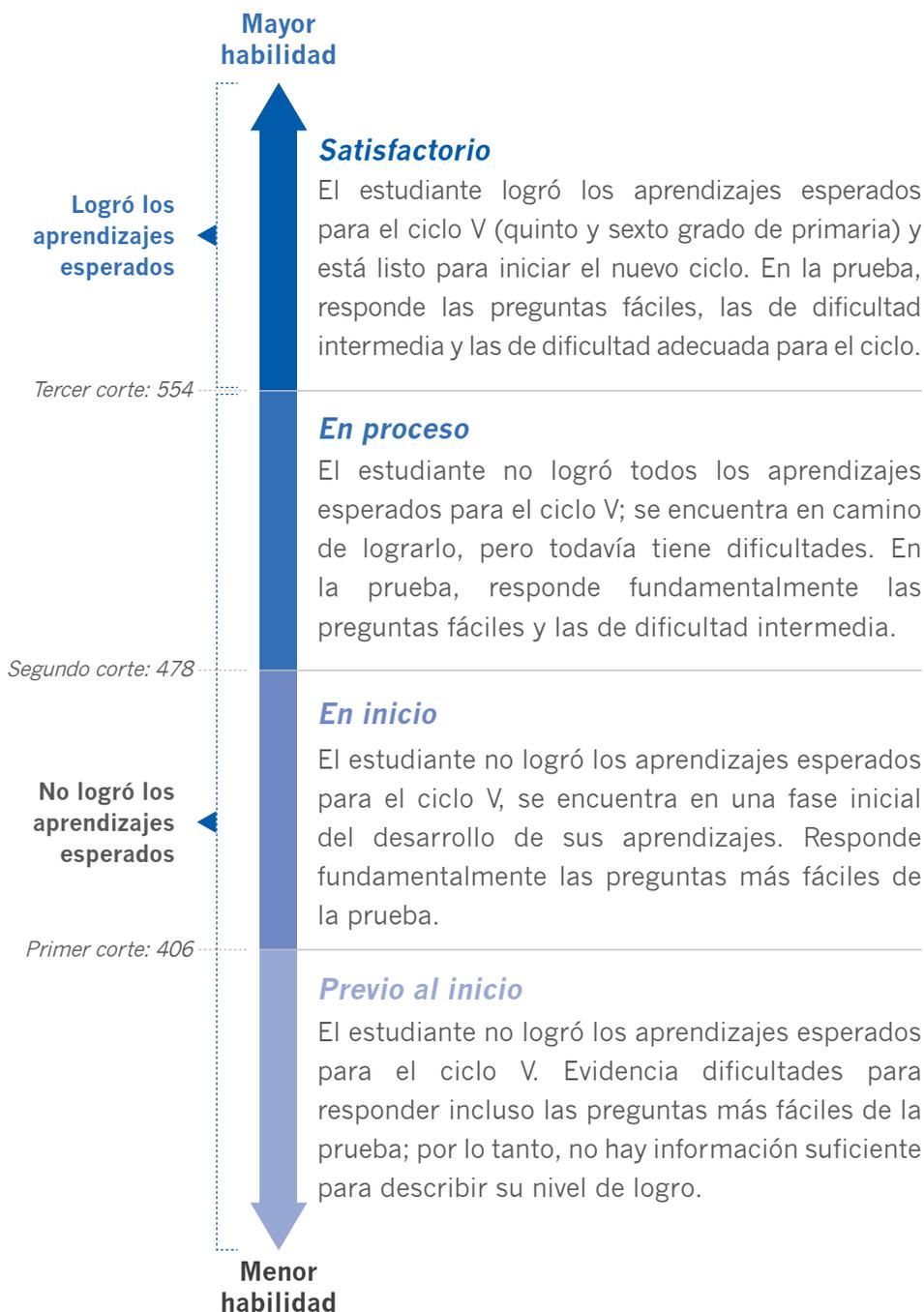


Figura 2.1. Niveles de logro y sus descripciones para Matemática

Es importante resaltar que los niveles de logro son inclusivos. Esto significa que los estudiantes agrupados en el nivel Satisfactorio pueden responder las preguntas de este y las de los niveles En proceso y En inicio; asimismo, los estudiantes del nivel En proceso pueden responder las preguntas propias del nivel En proceso y del nivel En inicio.

2.2 ¿Cuáles son los resultados nacionales?

A continuación, en la Tabla 2.1, se presentan los resultados nacionales obtenidos por los estudiantes del sexto grado, de acuerdo con el nivel de logro alcanzado en el área de Matemática.

Tabla 2.1. Resultados nacionales en Matemática según porcentaje de estudiantes en cada nivel de logro

Nivel	%	e.e
Satisfactorio	16,0	(0,63)
En proceso	39,4	(0,42)
En inicio	25,6	(0,42)
Previo al inicio	19,0	(0,42)

Fuente: MINEDU · UMC. Base de datos EM 2013. Sexto grado de primaria.

Nota: La expresión “e.e” corresponde a error estándar de estimación, el cual mide la diferencia promedio existente entre el valor real de la población y aquel que se estima a partir de la muestra.

En la Tabla 2.1 se aprecia que solo el 16% de los estudiantes muestra un desempeño acorde con lo exigible para este grado: un manejo eficaz de los conocimientos y las capacidades matemáticas previstas. Es decir, esta pequeña cantidad de estudiantes estaría en posibilidades de formular y resolver problemas, desarrollar razonamientos y comunicar matemáticamente, en distintas situaciones, involucrando los contenidos correspondientes al V ciclo de la Educación Básica Regular (EBR).

Dado que apenas el 16% se ubica en el nivel Satisfactorio, entonces el 84% del total de los estudiantes de sexto grado no alcanza este nivel; esto implica la presencia de un grupo ampliamente mayoritario de estudiantes con limitaciones para posteriores aprendizajes, lo que podría ocurrir no solo en matemática sino también en otras áreas curriculares, justamente cuando culminan el nivel primario de EBR; asimismo, quienes conforman este grupo tendrían baja probabilidad de una actuación competente en situaciones de la vida diaria en la que necesitarían evidenciar sus conocimientos y capacidades matemáticas. Cabe mencionar que este grupo es heterogéneo en cuanto a su rendimiento, tal como se puede apreciar en su distribución en los niveles En proceso, En inicio y Previo al inicio.

El 16% de los estudiantes peruanos de 6.º grado logra el nivel Satisfactorio. El 84% restante tendría limitaciones para posteriores aprendizajes en todas las áreas que involucren a la competencia matemática y para una adecuada actuación en aspectos de su vida donde esta competencia se vea involucrada.

El 39,4% de los estudiantes se ubica en el nivel En proceso, evidenciando un manejo elemental de los conocimientos y de las capacidades evaluadas. A su vez, el 25,6% se encuentra en el nivel En inicio, mostrando un manejo incipiente de los conocimientos y de las capacidades evaluadas. Finalmente, el 19% del total de los estudiantes se encuentra en el nivel Previo al inicio: este grupo no evidencia tener los conocimientos ni las capacidades necesarias para realizar, de manera consistente, todas las tareas que son propias del nivel En inicio; es decir, ni siquiera se puede afirmar que manejan conocimientos y capacidades matemáticas que han debido consolidar en el ciclo anterior.

Estos resultados nacionales aportan una mirada global sobre cómo se ubican los estudiantes de todo el país a partir de su rendimiento en la prueba de matemática. Se puede profundizar su análisis abordando su composición por estratos (urbano o rural, público o privado, por sexo, lengua materna, polidocente o multigrado). Esta información se presenta en el Anexo B.

2.3 ¿Qué son capaces de hacer los estudiantes en cada nivel de logro?

Los niveles de logro establecidos permiten identificar grupos de estudiantes con similar perfil de logro de aprendizajes en las pruebas aplicadas en una muestra representativa de las instituciones educativas que cuentan con sexto grado de primaria en todo el país. A continuación, se caracteriza cada nivel con los desempeños específicos que realiza un estudiante que conforma el grupo correspondiente.

2.3.1 Lo que hacen los estudiantes que alcanzaron el Nivel Satisfactorio

Los estudiantes que se ubican en el Nivel Satisfactorio muestran un **manejo eficaz**, adecuadamente estructurado y flexible, de los conocimientos y de las capacidades matemáticas fundamentales exigibles para el V ciclo.

Estos estudiantes formulan y resuelven problemas en distintos contextos, para lo cual identifican relaciones o características matemáticas fundamentales, a veces incluso implícitas. Asimismo establecen posibles relaciones entre dos variables de tipo numérico, las evalúan y generalizan. También, aplican propiedades básicas para determinar, entre enunciados verbales alternativos o entre diversas representaciones, cuál corresponde a un objeto matemático solicitado.

Además, construyen variantes de gráficos geométricos de acuerdo con condiciones establecidas. Identifican distintos tipos de representaciones de una misma situación. Y, también, muestran un uso pertinente del lenguaje matemático simbólico.

El estudiante que se ubica en el nivel Satisfactorio evidencia los siguientes logros:

- Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales o fraccionarios, con varias etapas y en situaciones variadas. Los problemas pueden presentar información implícita o información en exceso de tipo matemático.
- Resuelve problemas multiplicativos que involucran la noción de proporcionalidad simple (partición o medida, que dan lugar a que uno de los factores sea desconocido) entre dos cantidades, expresadas mediante números naturales o decimales, en situaciones variadas de contexto real.
- Formula problemas matemáticos que involucran nociones aditivas o multiplicativas con números naturales o decimales, a partir de información presentada en diversos formatos.
- Identifica equivalencias entre unidades de distinto orden en el sistema de numeración decimal.
- Recodifica números decimales, bajo una condición, desde su representación gráfica a su notación compacta y viceversa, usando el sistema monetario.
- Interpreta y aplica la fracción como parte-todo y también como razón, con cantidades discretas, a partir de su representación gráfica.
- Resuelve problemas que involucran a la fracción como operador en situaciones de vida cotidiana.

Un estudiante que se ubica en el nivel Satisfactorio formula y resuelve problemas en distintos contextos. Asimismo, establece posibles relaciones entre dos variables numéricas, las evalúa y generaliza. También, identifica distintos tipos de representaciones de una situación y muestra un uso pertinente del lenguaje simbólico.

- Resuelve problemas que involucran la medida del tiempo, expresada en horas y minutos, en situaciones variadas.
- Comunica, usando con propiedad términos matemáticos y representaciones simbólicas numéricas, algebraicas y geométricas, como las fracciones, ecuaciones sencillas de primer grado y los pares ordenados, respectivamente.
- Identifica objetos geométricos (ángulos, rectas paralelas, radio de una circunferencia) en situaciones de la vida cotidiana.
- Identifica el desarrollo de un prisma rectangular.
- Formula o resuelve problemas que involucran una relación de igualdad, a partir de información presentada en diversos formatos como balanzas en equilibrio, por ejemplo.
- Resuelve ecuaciones sencillas de primer grado definidas en el conjunto de los números naturales.
- Evalúa y generaliza patrones que involucran, como máximo, dos variables numéricas.
- Resuelve problemas geométricos que involucran la medida del perímetro o el volumen, en unidades convencionales o arbitrarias, a partir de gráficos que tienen datos implícitos.
- Visualiza e identifica tipos de triángulos de acuerdo con su medida, a partir de representaciones gráficas en posiciones no usuales o formando parte de cuadriláteros.
- Identifica la descripción correspondiente al gráfico de un cuadrilátero, atendiendo a las características de sus lados y de sus ángulos.
- Identifica la ampliación de una figura verificando la proporcionalidad en sus dimensiones.
- Visualiza y construye representaciones geométricas de formas bidimensionales, aplicando propiedades básicas referidas a relaciones entre lados o medida de lados y ángulos.
- Resuelve problemas que requieren elaboración de información a partir de gráficos estadísticos.
- Identifica la tabla correspondiente a la información presentada en un gráfico circular sin datos numéricos.

- Interpreta e identifica la correspondencia de información presentada en tablas y gráficos.
- Resuelve problemas que involucran el cálculo de la media aritmética o moda en situaciones cercanas a la experiencia del estudiante.
- Interpreta la noción de promedio o media aritmética de un grupo de datos.
- Analiza situaciones e identifica sucesos imposibles, probables o seguros. También identifica un experimento determinista.

A continuación, se comentan algunos ejemplos de preguntas⁴ que se presentaron a los estudiantes en la evaluación y que son representativos de este nivel.

Ejemplo de nivel Satisfactorio – Pregunta 1

En la banda de música de la escuela hay 30 estudiantes, de los cuales $\frac{2}{5}$ tocan tambor. ¿Cuántos estudiantes de la banda tocan tambor?

- a) 60 estudiantes,
- b) 15 estudiantes.
- c) 12 estudiantes.
- d) 6 estudiantes.

Ficha técnica

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Números y operaciones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: Satisfactorio

Medida Rasch: 539⁵

Respuesta: c

⁴ La Tabla C1 del anexo C proporciona un resumen de todos los ejemplos de preguntas utilizados en este informe.

⁵ En la Evaluación, en Matemática la medida más baja fue 225 y la más alta 743.

¿Qué evalúa esta pregunta?

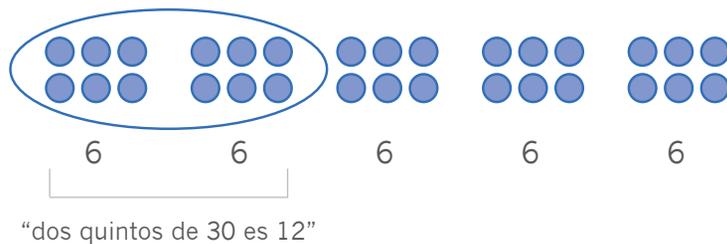
Evalúa la capacidad del estudiante de resolver un problema de fracciones, con cantidades discretas, en el ámbito escolar. Demanda fundamentalmente una comprensión y un manejo de la noción de fracción como operador: un número que transforma la cantidad sobre la que opera o se aplica.

Un desempeño característico del nivel Satisfactorio en 6.º grado es comprender que una fracción es una relación entre cantidades, donde los valores del numerador y denominador no se observan de manera directa, en forma independiente, como ocurre en los números naturales.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Un primer paso esencial es comprender el problema. Incluye establecer que se busca conocer cuántos integrantes, del total de una banda de música (dato), tocan el tambor.

A continuación, podría precisar un camino; de modo que proyecta aplicar u operar la fracción sobre la cantidad total, es decir, hallar “las dos quintas partes de 30”. Este cálculo puede hacerlo de diferentes maneras. Así, una variante de un procedimiento gráfico puede ser representar 30 objetos y luego fraccionar el total en 5 grupos con igual cantidad de elementos, vale decir formar “quintos”. Finalmente, tomar “dos quintos” de los formados a partir de los 30 objetos.



Otra manera de resolver el problema es efectuarla haciendo uso del lenguaje simbólico y los procedimientos respectivos:

$$\frac{2}{5} \times 30 = 2 \times \left(\frac{1}{5} \times 30 \right) = 2 \times 6 = 12$$

Finalmente, podría evaluarse la pertinencia de la respuesta obtenida. ¿Es aceptable que dos quintos de 30 resulte ser igual a 12? Dos quintos es menor que un medio (o una mitad), así que dos quintos de 30 es menor que la mitad de 30. Como 15 es la mitad de 30, una respuesta al problema será una cantidad menor que 15; siendo 12 menor que 15, entonces 12 es una respuesta aceptable.

De acuerdo con los resultados de la prueba, se puede afirmar que solo los estudiantes ubicados en el nivel Satisfactorio resuelven problemas que exigen el uso de la noción de fracción como operador para una cantidad discreta.

Ejemplo de nivel Satisfactorio – Pregunta 2

Diego registró sus notas de Matemática durante los tres trimestres. Él obtuvo 15 como nota promedio. Observa:

Notas de Matemática

Trimestre	Notas
1°	14
2°	14
3°	17
Nota promedio	15

Con respecto a la nota promedio, ¿qué afirmación es correcta?

- a) Es como si en cada trimestre hubiera sacado 15.
- b) Es la nota que obtiene la mayoría de estudiantes.
- c) 15 es la nota mínima que ha sacado Diego en cada trimestre.
- d) 15 es la nota que Diego obtendrá en la siguiente evaluación de Matemática.

Ficha técnica

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Estadística y probabilidad

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: Satisfactorio

Medida: 532

Respuesta: a

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la capacidad de expresar, de manera breve y clara, el significado de promedio al utilizarlo en una situación familiar para el estudiante: la medición del rendimiento escolar. Se sustenta en una comprensión esencial del concepto de promedio.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

A diferencia de la propuesta frecuente de cálculo del promedio de un conjunto de valores numéricos, se pide identificar cuál es la afirmación correcta referida al concepto de promedio aplicado a una situación concreta, lo que constituye una tarea más exigente. Un aspecto esencial del concepto de promedio aritmético es ser un valor intermedio representativo de un conjunto de datos referidos a un hecho; en este caso, sirve para analizar cada alternativa:

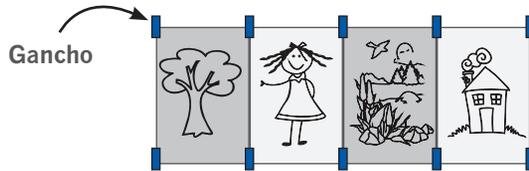
Un desempeño característico del nivel Satisfactorio en 6.º grado es reinterpretar y expresar una noción o concepto de de una manera equivalente, sin necesariamente recurrir a un cálculo, ni alterar su esencia.

- “a) Es como si cada trimestre hubiera sacado 15” es una afirmación válida, ya que 15 es un valor intermedio entre los valores extremos 14 y 17, correspondientes a las notas de Diego; de modo que sí puede reemplazar a cada una de las notas de él.
- “b) Es la nota que obtiene la mayoría de estudiantes” no concierne a las notas específicas de Diego; así que se la descarta.
- “c) 15 es la nota mínima que ha sacado Diego en cada trimestre” no corresponde al significado de promedio y, además, no es cierta; por lo tanto, se la descarta.
- “d) 15 es la nota que Diego obtendrá en la siguiente evaluación de Matemática” se orienta a predecir la ocurrencia de un hecho futuro, tomando distancia del concepto de promedio; entonces, se la descarta.

Se concluye que la única respuesta válida es la alternativa a).

Ejemplo de nivel Satisfactorio – Pregunta 3

Cecilia observa que su maestra utiliza ganchos para colgar las hojas de trabajo de sus compañeros de la siguiente manera.



Luego, Cecilia elabora la siguiente tabla:

Cantidad de hojas de trabajo	1	2	3	4
Cantidad de ganchos utilizados	4	6	8

Si ella sabe que la maestra va a colgar 20 hojas de trabajo, ¿cuántos ganchos utilizará?

- a) 80 ganchos.
- b) 50 ganchos.
- c) 42 ganchos.
- d) 12 ganchos.

Ficha técnica

Capacidad: Razonamiento y demostración

Contenido: Cambio y relaciones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: Satisfactorio

Medida: 523

Respuesta: c

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la capacidad de razonamiento del estudiante para interpretar regularidades en el entorno próximo (el aula), generalizar el proceso de identificación de sus términos y obtener un valor solicitado. Demanda fundamentalmente el manejo de secuencias.

Un desempeño característico del nivel Satisfactorio en 6.º grado es comprender que la sistematización de la información permite visualizar regularidades en situaciones donde se presenta un cambio. De esta forma es posible proyectar la ocurrencia de situaciones desconocidas inicialmente.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Primero, comprender la situación focalizando su atención en cómo intervienen los ganchos al colgar cierta cantidad de hojas. Luego, explorar e identificar un camino de generalización haciendo un seguimiento del proceso a partir de la primera hoja, analizando cómo varía la cantidad de ganchos ante sucesivos incrementos de hojas colgadas; en esta fase le conviene aprovechar el recurso utilizado por Cecilia: la tabla que relaciona la cantidad de hojas con la cantidad de ganchos utilizados. Finalmente, utilizar el nivel de generalización conseguido para dar respuesta a la pregunta.

¿Cómo generalizar? Una forma es relacionar la cantidad de ganchos utilizados, con la cantidad de hojas de trabajo. Veamos algunos casos:

Para 1 hoja se necesita 2 ganchos por cada costado:

$$2 + 2 = 4$$

Para 2 hojas, se usa 2 ganchos más:

$$2 + 2 + 2 = 6$$

Para 3 hojas, otra vez se agrega 2 ganchos:

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

Para 4 hojas, nuevamente se agrega 2 ganchos:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

Y así, sucesivamente. Se aprecia que la cantidad de ganchos es un valor que representa una adición repetida del sumando 2. ¿Cuántas veces 2? ¿El número de veces tiene algo que ver con la cantidad de hojas? Al explorar se encuentra que:

$$1 \text{ hoja} \longrightarrow 2 \text{ veces } 2: 2 \times 2 = (1 + 1) \times 2$$

$$2 \text{ hojas} \longrightarrow 3 \text{ veces } 2: 3 \times 2 = (2 + 1) \times 2$$

$$3 \text{ hojas} \longrightarrow 4 \text{ veces } 2: 4 \times 2 = (3 + 1) \times 2$$

$$4 \text{ hojas} \longrightarrow 5 \text{ veces } 2: 5 \times 2 = (4 + 1) \times 2$$

Luego, por analogía, para **20** hojas se necesitará:

$$(20 + 1) \times 2 = 21 \times 2 = 42$$

También se podría inferir que el número de veces que se repite el sumando 2 es una unidad más que el número que indica la cantidad de hojas. Por tanto, para 20 hojas la cantidad de ganchos será igual a 21 veces el sumando 2, es decir $21 \times 2 = 42$.

Finalmente, podría evaluarse si esta elaboración da lugar a una respuesta válida. Dado que se ha aplicado en forma adecuada un razonamiento de tipo inductivo y, además, se ha puesto un cuidado especial en la validez del proceso verificado con 1, 2, 3 y 4 hojas para que sea aplicable a 20 hojas (transferencia en el ámbito de números naturales), se concluye que la respuesta obtenida es válida.

Es importante destacar, que uno de las oportunidades más valiosas a nivel formativo es el proceso de encontrar regularidades en situaciones de clase. En ellas, el estudiante puede expresar sus procedimientos empleando un lenguaje coloquial, con gráficos, con operaciones y los docentes pueden identificar el nivel de generalización alcanzado por los estudiantes.

Ejemplo de nivel Satisfactorio – Pregunta 4



A partir de la siguiente situación debes escribir un **problema que tiene una respuesta dada**. Toma en cuenta que para resolver este problema debes usar lo que has aprendido en Matemática.

Crea un problema usando los datos de la imagen y cuya respuesta sea “6 manzanas”.



Respuesta: 6 manzanas

Ficha técnica

Capacidad: Resolución y formulación de problemas

Contenido: Número y operaciones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: Satisfactorio

Medida Rasch: 512

Respuesta correcta:

Formula un problema contextualizado utilizando la información del gráfico (parcial o totalmente) y cuya respuesta es “6 manzanas”.

Respuesta parcialmente correcta

Formula un problema contextualizado utilizando la información del gráfico; sin embargo, no plantea su pregunta o, cuando lo hace, su respuesta no es “6 manzanas”.

En otros casos, formula un problema completo utilizando solo el contexto de manzanas, pero no los datos de la imagen, obteniendo como respuesta “6 manzanas”.

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la capacidad de formular problemas matemáticos a partir de condiciones dadas, en este caso tanto una imagen que delimita la situación como una respuesta preestablecida.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Primero, identificar los datos y condiciones presentes, e imaginar una situación problemática que los involucre. Con este marco, explorando posibles opciones, debe formular un problema cuya respuesta sea 6 manzanas. Llevar a cabo esta tarea exige que el estudiante considere como elemento clave las relaciones u operaciones referidas a la cantidad de manzanas.

Una característica esencial de esta pregunta es ser abierta; su complejidad radica en la toma de decisiones por parte del estudiante, hecho que origina una gran variedad de soluciones. Esto permite un mejor acercamiento a los procesos que ellos realizan, de modo que se pueda apreciar con claridad sus logros y sus dificultades. A continuación, se presenta la respuesta construida por un estudiante evaluado:

Un desempeño del nivel Satisfactorio en 6.º grado es integrar conocimientos y habilidades matemáticas como herramientas para interpretar y recrear una situación real. La formulación de problemas permite visualizar el grado de esta integración.

En la bolsa de sandro hay 4
manzanas y afuera hay 2 manzanas.
¿Cuántas manzanas hay en total?

Así como en este caso, la gran mayoría de estudiantes eligió trabajar con una situación aditiva, de una o más etapas; y, en su formulación, utilizaron los elementos destacados de la imagen: una bolsa, cuyo contenido no se percibe visualmente, y dos manzanas fuera de ella. Además, para cumplir la condición de que resulte la respuesta preestablecida, se incorpora como dato que dentro de la bolsa hay 4 manzanas.

2.3.2 Lo que hacen los estudiantes que alcanzaron el nivel En proceso

Los estudiantes que se ubican en el nivel En proceso muestran un **manejo elemental**, débilmente estructurado y con insuficiente flexibilidad, de los conocimientos y de las capacidades matemáticas fundamentales exigibles para el V ciclo.

Estos estudiantes resuelven problemas que cuentan con información mayoritariamente explícita, expresada en lenguaje coloquial, y que están referidos (en lo fundamental) a situaciones de la vida diaria o de presencia frecuente en la actividad escolar. En esta labor relacionan elementos o acciones esenciales y aplican estrategias o procedimientos usuales. Por otra parte, formulan problemas a partir de información referida a situaciones cercanas a su experiencia.

Asimismo, deducen algunas relaciones numéricas, así como identifican objetos matemáticos en situaciones diversas, mayoritariamente intra matemáticas, a partir de la interpretación de descripciones o de definiciones.

Los estudiantes que se ubican en el nivel En proceso resuelven y formulan problemas que presentan información explícita y que fundamentalmente están referidos a situaciones cercanas a su experiencia. Asimismo, deducen algunas relaciones numéricas. También, interpretan datos en los gráficos y las representaciones simbólicas incluidas en diverso tipo de situaciones.

Los estudiantes que se ubican en este nivel interpretan o completan datos en gráficos, y describen sus procedimientos en la resolución de problemas. Además, por lo general interpretan las representaciones matemáticas simbólicas incluidas en diversos tipos de situaciones, así como el gráfico estadístico asociado a una tabla dada.

El estudiante que se ubica en el nivel En proceso evidencia los siguientes logros:

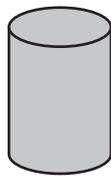
- Resuelve problemas multiplicativos que involucran la noción de proporcionalidad simple (suma repetida) entre dos cantidades, expresadas mediante números naturales o decimales, en situaciones variadas de contexto real.
- Interpreta y representa una situación a través de una operación indicada.
- Representa simbólicamente una fracción propia, como relación parte-todo, a partir de su representación gráfica, en particular cuando esta corresponde a una magnitud continua; por ejemplo, representa la fracción a partir de un gráfico que utiliza una superficie rectangular.
- Interpreta el valor de posición de una cifra en un número.
- Resuelve problemas que involucran la medida del tiempo, expresada en semanas y días, en situaciones variadas.
- Completa una figura simétrica al reflejarla.
- Identifica el desarrollo de un cilindro.
- Interpreta y organiza un conjunto de datos en una tabla de frecuencias.
- Interpreta tablas completas de doble entrada.
- Interpreta un gráfico circular con datos explícitos.
- Identifica el gráfico circular correspondiente a la información presentada en una tabla.
- Identifica el suceso que tiene mayor probabilidad de ocurrencia, a partir de la representación gráfica de una situación aleatoria.

- Identifica la ocurrencia de un suceso como seguro, posible o imposible, a partir de la representación gráfica de una situación aleatoria.

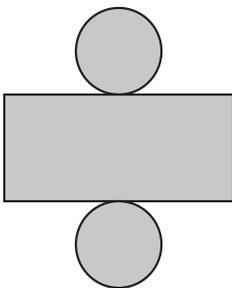
A continuación, se comentan algunos ejemplos de preguntas que se presentaron a los estudiantes en la evaluación y que son representativos del nivel En proceso.

Ejemplo de nivel En proceso – Pregunta 5

¿Con cuál de las plantillas mostradas se podrá armar este cilindro?



a



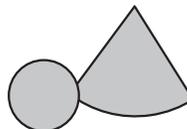
b



c



d



Ficha técnica

Capacidad: Razonamiento y demostración

Contenido: Geometría

Contexto: Disciplinar (intra matemático)

Nivel de Logro: En proceso

Medida: 439

Respuesta: a

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la capacidad de razonamiento del estudiante para establecer la relación entre un cuerpo geométrico y su desarrollo en el plano; es decir, para determinar qué piezas bidimensionales, armadas adecuadamente, darían lugar al cilindro presentado.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

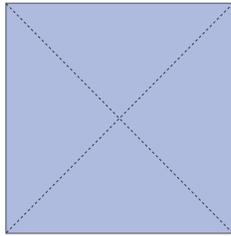
La visualización del cilindro le posibilita identificar algunas características y relaciones esenciales presentes en ese cuerpo tridimensional; la más evidente es que tiene 2 bases circulares, paralelas entre sí, unidas por una superficie que “rodea” el cilindro. Ahora bien, ¿qué clase de superficie lo “rodea” conectando sus bases circulares? Imaginando o proyectando la forma que tomaría, en la que podría apelar a su experiencia vivencial con etiquetas que rodean una superficie cilíndrica (como un tarro de leche o una conserva), el estudiante llega a determinar que tendrá una forma rectangular.

Finalmente, analizando las relaciones entre el tamaño de las bases circulares y la longitud del lado de la superficie rectangular que “las bordea”, el estudiante concluye que esta longitud debe ser mucho mayor que el diámetro (un poco más del triple, pues formalmente tendría que ser igual a la longitud de la circunferencia, la cual se calcula mediante el producto de π por el diámetro).

Otro camino es visualizar las alternativas y, haciendo uso esencial de la imaginación y de la detección de algunas características básicas (como la presencia de dos bases circulares), seleccionar cuál de ellas serviría para construir el cilindro mostrado.

Ejemplo de nivel En proceso – Pregunta 6

Para hacer un barco, Ramiro divide una cartulina cuadrada en cuatro partes iguales, tal como se muestra en la siguiente figura.



¿Qué parte de la cartulina representa cada pedazo?

(a)

1

(b)

$\frac{1}{3}$

(c)

$\frac{4}{1}$

(d)

$\frac{1}{4}$

Ficha técnica

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Números y operaciones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: En proceso

Medida: 405

Respuesta: d

¿Qué evalúa esta pregunta?

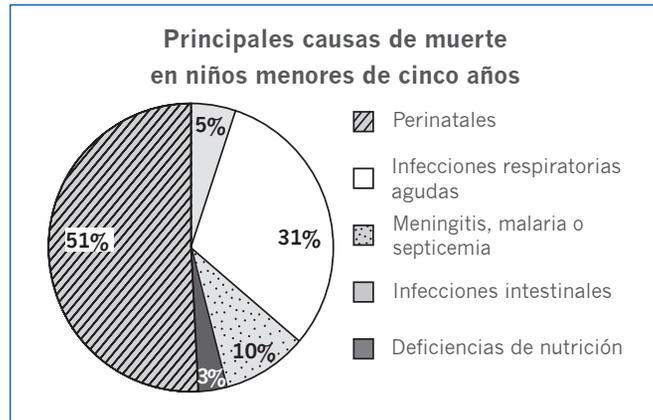
Evalúa la capacidad de interpretar la representación gráfica de una fracción y de expresarla simbólicamente. El contexto constituye una situación lúdica, fácilmente identificable por el estudiante.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

La comprensión de la situación implica identificar el todo (la cartulina cuadrada) y tener presente el proceso de su división en 4 partes iguales. El procedimiento de resolución puede hacer uso de material concreto o no; sin embargo, el estudiante debe establecer la relación parte–todo y concluir que cada pedazo representa la cuarta parte de la cartulina cuadrada. Finalmente, selecciona la notación $\frac{1}{4}$ como expresión simbólica de tal relación.

Ejemplo de nivel En proceso – Pregunta 7

En el año 2012, el Ministerio de Salud presentó un informe acerca de las principales causas de muerte en niños menores de cinco años. Observa el siguiente gráfico:



Según el gráfico, ¿cuál es la causa que origina el menor porcentaje de muerte en niños menores de 5 años?

- a) Perinatales.
- b) Infecciones intestinales.
- c) Deficiencias de nutrición.
- d) Infecciones respiratorias agudas.

Ficha técnica

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Estadística y probabilidad

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: En proceso

Medida: 403

Respuesta: c

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la capacidad de interpretar información cuantitativa referida a una situación social de interés público, presentada mediante un gráfico circular.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

El acceso a información de interés público (por ejemplo con fines de prevención de salud) exige también la comprensión de gráficos estadísticos de uso común. En este caso, la información se presenta mediante un gráfico circular, en el cual captan una primera atención el título que resume el tema atendido, Principales causas de muerte en niños menores de 5 años, y la leyenda que caracteriza cada sector circular relacionándolo con una de tales causas. Una vez que el estudiante haya identificado claramente estos elementos, compara los diferentes sectores para determinar cuál de estos representa la causa que origina menos muertes. En este proceso, la comparación puede realizarse a partir del tamaño de cada sector circular (opción donde interviene principalmente la percepción) o de los valores numéricos asociados a cada uno de los sectores, opción que probablemente requiere haber construido al menos una noción elemental de los porcentajes.

Un desempeño del nivel En proceso en 6.º grado es comparar cantidades explícitas en gráficos estadísticos. En el caso del nivel Satisfactorio, el desempeño incluye también comparaciones con información no explícita.

2.3.3 Lo que hacen los estudiantes que alcanzaron el nivel En inicio

Los estudiantes que se ubican en el nivel En inicio evidencian un **manejo incipiente**, inconexo y escasamente flexible de los conocimientos y de las capacidades matemáticas fundamentales exigibles para el V ciclo.

Estos estudiantes resuelven problemas que presentan contextos que les son familiares, con información explícita, extensión corta y estructura simple. En este proceso relacionan algunos elementos y aplican procedimientos cortos aprendidos.

Los estudiantes ubicados en este nivel deducen relaciones sencillas y explican procedimientos simples.

Asimismo, identifican y comparan datos presentes en gráficos y tablas, y completan gráficos de barras a partir de tablas, así como identifican un objeto geométrico o una parte de éste utilizando criterios perceptuales. Además, aplican las convenciones numéricas y las representaciones simbólicas que tienen uso frecuente.

Los estudiantes ubicados en el nivel En inicio resuelven problemas con estructura simple y que presentan contextos cercanos a su experiencia. También, deducen relaciones sencillas. Asimismo, aplican las convenciones numéricas y las representaciones simbólicas que tienen uso frecuente.

El estudiante que se ubica en el nivel En inicio evidencia los siguientes logros:

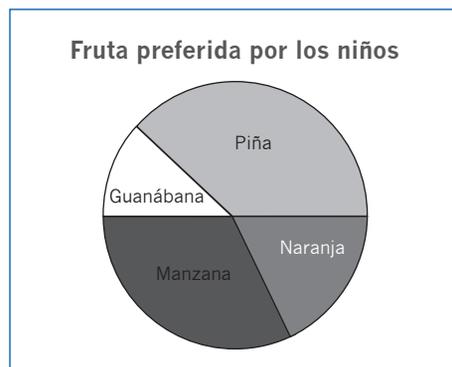
- Resuelve problemas aditivos de una etapa, con números naturales o decimales, y problemas multiplicativos de una etapa con números naturales; estos no presentan información en exceso, innecesaria, de tipo matemático y, con frecuencia, las situaciones se relacionan con la actividad académica o forman parte de la experiencia personal.
- Recodifica números decimales desde su representación gráfica a la notación compacta convencional, usando el sistema monetario.
- Recodifica números desde su descomposición no convencional, en unidades, decenas y centenas, a su notación compacta.
- Interpreta el número decimal en situaciones de medida y de lectura de instrumentos, como, por ejemplo, en el termómetro.
- Resuelve situaciones que impliquen encontrar un valor numérico desconocido en una igualdad.
- Identifica un término de una secuencia aditiva de números naturales o de una secuencia gráfica por repetición. Asimismo, explica el procedimiento para obtener el término siguiente de la secuencia.
- Interpreta situaciones que involucran relaciones numéricas sencillas con números naturales. Por ejemplo: identificar la ruta más corta para ir de un lugar a otro cercano, a partir de recorridos referidos al plano de una ciudad.
- Resuelve problemas de áreas de figuras poligonales, a partir de su representación gráfica sobre una cuadrícula.
- Resuelve problemas que involucran el cálculo del perímetro de un polígono con datos explícitos en unidades convencionales.
- Identifica figuras simétricas en objetos de su entorno.
- Identifica figuras planas en distintas posiciones, a partir de características perceptuales; también identifica una de las vistas de un sólido geométrico conocido.

- Resuelve problemas que involucran la lectura de una tabla de frecuencias con información explícita
- Interpreta datos presentados en un gráfico circular a partir de criterios perceptuales.
- Identifica y compara datos numéricos de un gráfico de barras simple.
- Completa un gráfico de barras simples, a partir de información explícita presentada en una tabla de frecuencias.

A continuación, se comentan algunos ejemplos de preguntas que se presentaron a los estudiantes en la prueba y que son representativos del nivel En inicio.

Ejemplo de nivel En inicio – Pregunta 8

Se encuestó a un grupo de niños sobre la fruta que prefieren. El gráfico muestra los resultados de esta encuesta.



Según el gráfico, ¿qué fruta prefieren la mayor cantidad de niños?

- a) Piña
- b) Naranja
- c) Manzana
- d) Guanábana

Ficha técnica**Capacidad:** Comunicación matemática**Contenido:** Estadística y probabilidad**Contexto:** Real (extra matemático)**Nivel de Logro:** En inicio**Medida:** 353**Respuesta:** a***¿Qué evalúa esta pregunta?***

Evalúa la capacidad de comparar a partir de la identificación de datos presentados en un gráfico circular que refiere a una experiencia próxima, vivencial, de los estudiantes.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Se pide establecer cuál es la fruta preferida de un grupo de niños a partir del gráfico circular; para esto, el procedimiento debe sustentarse en la consideración de que el sector circular con mayor superficie es el que representa la fruta preferida por la mayor cantidad de niños.

¿Cómo hacerlo? Una opción es considerar la percepción visual para identificar que la piña es la fruta que tiene mayor preferencia entre los niños; una manera de verificar esto es trabajar con las dos mitades formadas, procediendo a compararlas: así, siendo la guanábana la fruta con menor preferencia entre todas, la otra fruta con la que conforma la primera mitad, la piña, debe ser mayor que cualquiera de las otras dos frutas que conforman la segunda mitad; esto se explica debido a que cuanto más pequeña es una parte, la otra parte (que completa con ella una mitad) es cada vez más grande.

Un desempeño del nivel En inicio en 6.º grado es comparar cantidades explícitas en gráficos estadísticos empleando la percepción o herramientas intuitivas. En el nivel Satisfactorio se debiera realizar esta comparación con información no explícita.

Ejemplo de nivel En inicio – Pregunta 9

Observa la siguiente secuencia y escribe el número que sigue.

3, 8, 13, 18, 23, _____

Ahora explica cómo encontraste dicho número.

Ficha técnica

Capacidad: Razonamiento y demostración

Contenido: Cambio y relaciones

Contexto: Disciplinar (intra matemático)

Nivel de Logro: En inicio

Medida: 324

Respuesta correcta:

Escribe “28” como término de la secuencia y explica cómo lo encontré.

Respuesta parcialmente correcta:

Halla el patrón de la secuencia, pero no el término siguiente de la misma o se equivoca al buscarlo. En otros casos, escribe “28”; pero no explica cómo lo halló.

Un desempeño del nivel En inicio en 6.º grado consiste en explicar cómo obtiene un término en una secuencia de patrón aditivo. Este desempeño es importante para el posterior desarrollo de la generalización, desempeño característico del nivel Satisfactorio

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la capacidad de razonamiento para interpretar una secuencia y determinar el término siguiente, explicando, además, el procedimiento empleado.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Al observar los datos, se encuentra que los valores siguen una tendencia ascendente; una segunda exploración busca identificar cómo y cuánto varían, logrando identificar el patrón de la secuencia. A manera de ejemplo, se presentan las siguientes soluciones efectuadas por dos estudiantes.

yo lo encontré sumandole mas 5
por ejemplo.

$$\begin{array}{cccccc} +5 & +5 & +5 & +5 & +5 & \\ \hline 3, & 8, & 13, & 18, & 23, & 28 \end{array}$$

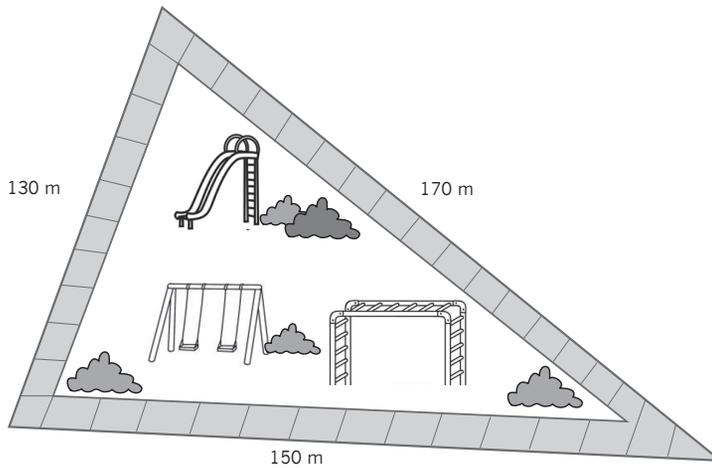
primero cuentan los números de cuanto
en cuanto esta ya tienes que estar rege
nando, esta de 5 en 5

$$\begin{array}{r} 23 + \\ 5 \\ \hline 28 \end{array}$$

Como se muestran en las imágenes, algunos niños indicaron que, a partir del segundo término, el siguiente se obtiene agregando siempre 5 unidades; esto fue enunciado, con distintas palabras o mediante símbolos, como explicación del proceso de resolución. Por tanto, escribieron “28” como el número que sigue.

Ejemplo de nivel En inicio – Pregunta 10

Este es el parque en el que Roberto hace ejercicios todas las mañanas. Observa:



¿Cuántos metros recorre Roberto al dar una vuelta por el borde de este parque?

- a) 280 m b) 300 m c) 320 m d) 450 m

Ficha técnica

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Geometría

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: En inicio

Medida: 241

Respuesta: d

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la capacidad de resolver problemas que requieren emplear la noción de perímetro expresado como el "borde" en este contexto en una situación concreta y aplicar de manera intuitiva la noción de perímetro utilizando medidas convencionales.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

En principio, se necesita comprender que Roberto, al dar una vuelta, recorre por una sola vez el trayecto con las longitudes indicadas en cada lado del parque triangular; luego, se procede a efectuar la adición correspondiente: $130 + 170 + 150 = 450$. Por ello, se establece que Roberto recorre 450 m.

3.

**Análisis de las
dificultades de
los estudiantes
en Matemática y
sugerencias para
superarlas**

3. Análisis de las dificultades de los estudiantes en Matemática y sugerencias para superarlas

En los capítulos precedentes, se han tratado aspectos esenciales referidos a la competencia matemática, a la descripción del modelo de evaluación y se han comentado los resultados nacionales; también se ha explicado qué son capaces de hacer los estudiantes que se ubicaron en cada uno de los niveles de desempeño, empleando algunas preguntas como ejemplos.

En este capítulo, se analizan las principales dificultades que evidenciaron, en su rendimiento, los estudiantes de sexto grado ubicados en los niveles En proceso, En inicio y Previo al inicio. Este análisis proporciona elementos de diagnóstico y de orientación más específicos para una actuación docente eficaz, apoyando así su labor por la mejora de la calidad educativa.

Los errores usualmente están presentes en todo proceso de aprendizaje. En el caso de Matemática, de igual modo, se cometen diversidad de errores. Sus orígenes son distintos y su presencia frecuente es una expresión de las dificultades de los estudiantes. En este informe, se asume que un error se produce cuando el aprendiz realiza una práctica que no es válida, correcta o adecuada desde el punto de vista de la matemática escolar.

A partir de una exploración de los resultados de la prueba de Matemática, se han seleccionado cinco categorías de dificultades referidas a los siguientes aspectos:

- › conceptualizar y usar fracciones;
- › interpretar y construir patrones;
- › identificar y aplicar propiedades básicas de formas bidimensionales;
- › identificar y construir gráficos estadísticos; y
- › formular problemas matemáticos.

Estas dificultades fueron priorizadas por su incidencia en la competencia matemática. Asimismo, en su tratamiento se enfatizan los procesos cognitivos involucrados, analizando qué

prácticas pedagógicas podrían originarlas. Además, se propone sugerencias para la superación de cada dificultad. Así, cada docente tiene a su alcance elementos para reflexionar sobre las dificultades de sus estudiantes, comprenderlas e influir en su superación.

3.1 Dificultades para conceptualizar y usar fracciones

3.1.1 ¿Qué deberían saber y saber hacer los estudiantes empleando la noción de fracción?

Diversas situaciones cotidianas requieren la comprensión y el manejo de las fracciones. Así tenemos:

- ▶ La relación entre una parte y el todo. Por ejemplo: “la mitad de todos los integrantes de la familia trabajan”.
- ▶ La expresión de medidas particulares de masa, longitud, superficie o volumen. Por ejemplo: “necesito un octavo de galón de pintura esmalte, color blanco”.
- ▶ El reparto equitativo. Por ejemplo: “distribuimos en cantidades iguales, 2 litros de leche entre las 8 niñas”.
- ▶ La comparación de dos cantidades mediante una razón: “2 flores rojas por cada 5 flores amarillas”.
- ▶ La transformación del estado inicial de una cantidad al aplicarle un operador: “tres cuartas partes del terreno de 2500 m² fueron sembrados de maíz”.

Estos casos muestran el uso cotidiano de las fracciones y, en consecuencia, resaltan la necesidad de su aprendizaje. Asimismo, proporcionan referentes para su estudio a lo largo de la educación básica, pues permiten considerar los distintos significados que puede tomar la fracción⁶. Precisamente, en nuestro sistema escolar se ha establecido que el estudio de las fracciones debe iniciarse en el IV ciclo y que debe ser ampliamente desarrollado en el V ciclo; de modo que al culminar la primaria el estudiante demuestre un manejo básico de estos significados al enfrentar situaciones diversas que las involucren. Así también, ellos irán

⁶ En la comunidad de educadores matemáticos, por lo general se identifican cinco significados del concepto de fracción: relación parte-todo, cociente (reparto equitativo), medida, operador y razón. En el Anexo D se presenta, en forma breve, estos significados.

construyendo aspectos fundamentales del tema que en el nivel secundario conocerán como el sistema de los números racionales.

En particular, al culminar el sexto grado, los estudiantes deben haber construido las bases del concepto de fracción a partir de la resolución de situaciones problemáticas que permitan un acercamiento a sus distintos significados, por ejemplo como reparto equitativo o medida⁷. También deben interpretar los números fraccionarios como un conjunto más amplio que los números naturales, y reelaborar el sentido tanto de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, como de las relaciones de igualdad y de desigualdad. Asimismo, deben manejar con pertinencia las distintas formas de representación de una fracción: con material concreto, gráficamente, en lenguaje verbal o en lenguaje simbólico.

3.1.2 ¿Cómo se expresan las dificultades de los estudiantes?

La experiencia de construir y utilizar el sistema de los números naturales constituye un soporte para el aprendizaje de las fracciones por parte de los estudiantes. Sin embargo, se aprecia que ciertos conocimientos válidos para el sistema de los números naturales son generalizados, aplicándolos incorrectamente a los números fraccionarios. Un caso típico de estos errores se produce cuando un estudiante considera al numerador y denominador como dos números naturales sin un vínculo o una relación definida entre sí. Así, la operación que se muestra a continuación evidencia como un estudiante procede a tratar a los elementos de una fracción (numerador y denominador) como si fueran dos números naturales independientes.

Se aprecia que ciertos conocimientos válidos para el sistema de los números naturales son generalizados, aplicándolos incorrectamente a los números fraccionarios.

$$\frac{19}{4} - \frac{4}{2} = \frac{15}{2}$$

⁷ En el Anexo D se presenta brevemente estos significados.

Como se mencionó anteriormente, la fracción puede tomar distintos significados en relación a las situaciones en las que se abordan. Así, por ejemplo, una fracción puede estar asociada a una medición o a una comparación cuantitativa entre una parte y todo el objeto, entre otras. Llinares y Sánchez (1997) sostienen que el significado parte-todo, tanto con cantidades continuas como discretas⁸, constituye la piedra angular sobre la cual se van a desarrollar algunos de sus restantes significados. Sin embargo, siguiendo o no esta última idea, el tratamiento de las fracciones enfocado a solo uno de sus significados impide enriquecer y consolidar el concepto de fracción, dando mayor cabida a los errores. Precisamente, una dificultad de los estudiantes consiste en no interpretar el significado que tendría la fracción en determinada situación. Al parecer, el tratamiento sesgado y predominante del significado parte-todo a lo largo de toda la primaria limita o interfiere en la debida comprensión de los otros significados de la fracción en nuestro sistema escolar. Para tener presente los distintos significados de la fracción, en el anexo D de este informe se presentan los significados de la fracción ejemplificados.

Por otro lado, la construcción de los diferentes significados está muy vinculada con las representaciones de una fracción. Sánchez (2001), nos dice que llegar a comprender una idea matemática, implica, entre otros aspectos, la habilidad de manejar sus diferentes representaciones y poder realizar conversaciones entre estas. Al respecto, un acercamiento a la actuación de los estudiantes mediante la evaluación muestra que en este ámbito se presentan dificultades; así lo evidencian los errores que se cometen al interpretar o construir representaciones gráficas, simbólicas o verbales de las fracciones, especialmente cuando intervienen cantidades discretas (que se caracterizan por ser susceptibles de ser contadas, como las mesas, por ejemplo). Asimismo, diversos errores se presentan al pasar de una forma a otra: de una representación gráfica a su expresión simbólica o viceversa.

Al efectuar operaciones con fracciones, los estudiantes requieren de estrategias o técnicas de cálculo que se basan en un manejo ordenado y jerarquizado de procedimientos; además, enfrentan

⁸ Las cantidades continuas presentan unidades que no están separadas unas de otras, aunque sí pueden ser particionadas: por ejemplo, la superficie del tablero de una mesa. Por su parte, las cantidades discretas se caracterizan por presentar unidades separadas unas de otras, siendo susceptibles de ser contadas, como las personas o los mangos.

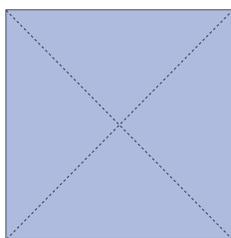
exigencias especiales de manejo de representaciones, usualmente simbólicas. En este campo, se evidencian errores recurrentes que reflejan la dificultad de los estudiantes para lograr la construcción del respectivo significado de la operación con estos nuevos números, lo que se vería acrecentado por las dificultades operativas en las fracciones; esto se explicaría, en parte, porque estarían aplicando, inapropiadamente, conocimientos pertinentes para las operaciones con números naturales a las operaciones con fracciones.

Finalmente, cabe acotar que durante la Evaluación también se aplicó un cuestionario a los docentes que tenían a su cargo Matemática en sexto grado, en las instituciones educativas donde los estudiantes rindieron la prueba. El foco de atención de este fue el conocimiento disciplinar de las fracciones. Se encontró que cierto número de docentes también presentan dificultades al resolver situaciones problemáticas, especialmente cuando involucran a la fracción como operador o como razón. Esto podría ser uno de los diversos factores que incidieron en los resultados.

A continuación se analizan algunas preguntas de la prueba aplicada, en las cuales se han evidenciado dificultades en la comprensión conceptual y en el manejo procedimental de las fracciones.

Ejemplo de dificultades en la comprensión de la noción de fracción y su uso – Pregunta 6

Para hacer un barco, Ramiro divide una cartulina cuadrada en cuatro partes iguales, tal como se muestra en la siguiente figura.



¿Qué parte de la cartulina representa cada pedazo?

- (a) 1 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{4}{1}$ (d) $\frac{1}{4}$

Ficha técnica

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Números y operaciones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: En proceso

Medida: 405

Resultados según respuesta de los estudiantes

Tipo de respuesta	Alternativa	%
Correcta	d	70,9
Incorrecta	a	4,6
	b	5,6
	c	18,1
No válida*		0,9

* Las respuestas no válidas incluyen la multimarca (más de una alternativa marcada) y las omisiones ("preguntas en blanco").

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la capacidad de interpretar la representación gráfica de una fracción y expresarla simbólicamente. El contexto constituye una situación lúdica, fácilmente identificable por el estudiante.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

La pregunta presenta una situación que se apoya en una representación gráfica: la superficie de una cartulina (una cantidad continua). El estudiante afronta dos exigencias fundamentales: interpretación de la situación y cambio de una forma de representación a otra. Así, a partir de la gráfica, establece la relación entre una de las partes resultantes de la división efectuada y toda la figura original. Luego, debe expresar en forma simbólica qué parte de la cartulina original representa cada pedazo.

¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?

No manejan el significado ni la forma de representar la relación parte-todo

Un 18,1% de los estudiantes evaluados (que marcaron la alternativa “c) $\frac{4}{1}$ ”) no construyeron correctamente el significado de la fracción como una relación parte-todo o se encuentran en una fase inicial del proceso; este porcentaje incluye a los estudiantes que, con una idea vaga de lo que es una fracción, conciben al numerador y al denominador como números que no tienen un vínculo definido y cuya posición en la fracción no es relevante, de modo que escriben $\frac{4}{1}$ en lugar de $\frac{1}{4}$.

Por otra parte, entre quienes marcaron la alternativa “a) 1”, un grupo posiblemente dedujo que, al estar “sombreada” o “pintada” toda la figura, la respuesta debía ser 1; mientras tanto, otro grupo habría identificado cada pedazo con 1, omitiendo que se preguntaba por la representación simbólica, numérica, de cada pedazo en relación con toda la cartulina.

Se confirma que la dificultad que presentan los estudiantes en el manejo de las diferentes formas de representación de un concepto es una de las causas más frecuentes de los errores, tal como lo sustentan D’Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2010).

Interpretan incorrectamente la situación y la expresan como una relación entre partes

A su vez, un 5,6% de los estudiantes evaluados dio una respuesta que expresaría la relación entre una parte y las partes restantes (alternativa “b) $\frac{1}{3}$ ”), evidenciando que tampoco han construido la noción de fracción como parte-todo; esto podría vincularse con situaciones frecuentes en ámbitos escolares donde se prioriza el conteo de partes –identificándolas a veces como numerador o denominador– y no la relación entre la(s) parte(s) y el todo.

Una dificultad en el manejo de las fracciones es el desconocimiento de lo que significa cada número conformante de una fracción. Este aspecto esencial debería desarrollarse con diversidad de experiencias que permitan otorgar sentido, tanto al numerador como al denominador de una fracción.

Ejemplo de dificultades en la conceptualización y el manejo de las fracciones – Pregunta 11

Francisco tenía $5\frac{3}{4}$ kg de manzana. Luego, utilizó $2\frac{1}{2}$ kg de manzana para preparar un pastel. ¿Cuántos kilogramos de manzana le quedan?

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta: _____

Ficha técnica

Capacidad: Resolución de Problemas

Contenido: Números y operaciones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: No exigible (Por encima de Satisfactorio)

Medida: 649

Resultados según respuesta de los estudiantes

Correcto (crédito completo):	15,6%
Halla la respuesta correcta ($3\frac{1}{4}$ kg, $\frac{13}{4}$ kg, 3,25 kg o una expresión equivalente) usando estrategias operativas de naturaleza aditiva o estrategias basadas en gráficas o esquemas.	
Parcialmente correcto (crédito parcial):	45,5%
Inicia un procedimiento válido, pero no lo culmina o, en su defecto, comete errores de cálculo o de ejecución.	
Incorrecto (sin crédito):	31,5%
Respuesta omitida (sin crédito):	7,4%

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la resolución de problemas de la vida cotidiana que involucran una situación aditiva de cambio, con fracciones, presentada mediante un enunciado verbal.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Identificar que se presenta una situación aditiva de cambio y, luego, desarrollar un procedimiento pertinente de cálculo con intervención de números mixtos.

¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?**No han consolidado el manejo de procedimientos de cálculo pertinentes para resolver una situación aditiva con fracciones**

El 45,5% de los estudiantes interpretó correctamente la situación y fue capaz de indicar o iniciar un procedimiento pertinente; sin embargo, incurrió en errores de cálculo, en una indebida ejecución o simplemente dejaron indicado ese procedimiento.

Un grupo significativo eligió la conversión de números mixtos a fracciones; pero no todos la culminaron debidamente por errores que expresarían incomprensión del significado de un número mixto como una forma de expresar la fracción impropia, lo que implica dificultades para comprender la noción de fracción. En la imagen adjunta, se aprecia que el estudiante calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores; pero no lo aplica, evidenciando el manejo de conocimientos desestructurados.

Una dificultad es la falta de consolidación de la noción de fracción (propia e impropia), el manejo de sus representaciones y los procedimientos de cálculo con fracciones y números mixtos (representación de fracción impropia).

$$5 \frac{3}{4} - 2 \frac{1}{2} = \text{mcm} = 4$$

$$15 - 4 = 11$$

Respuesta: les quedan 11 kilogramos de manzana.

La conversión termina erróneamente en una sustracción de números naturales y en un respuesta incongruente que presenta una cantidad mucho mayor que la cantidad inicial, pese a que el enunciado del problema indica que se utilizó una parte de esta.

Entre quienes sí efectuaron correctamente la conversión u optaron por efectuar en forma paralela la sustracción de las partes enteras y de las partes fraccionarias, se aprecian errores que muestran que no dominan estrategias o técnicas de cálculo. Así, se observa en la imagen que, al efectuar la sustracción de números mixtos, el estudiante halla la diferencia de las respectivas partes enteras, pero incurre en error en la sustracción de las correspondientes partes fraccionarias: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{4-2} = \frac{2}{2}$. Procede a restar dos parejas independientes de números naturales, ignorando el vínculo particular que guardan entre sí el respectivo numerador y el denominador. Además, tampoco verifica la validez de su respuesta.

Francisco tenía $5\frac{3}{4}$ kg de manzana. Luego, utilizó $2\frac{1}{2}$ kg de manzana para preparar un pastel. ¿Cuántos kilogramos de manzana le quedan?

Escribe aquí tu procedimiento

$$5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} = 3\frac{2}{2}$$

Respuesta: Tres enteros dos y medio

No interpretan las relaciones fundamentales presentes en la situación problemática

El 31,5% de los estudiantes no logró interpretar la situación planteada como un cambio que se produce en una cantidad dada en el transcurso del tiempo. En este caso, debían identificar una

cantidad inicial ($5\frac{3}{4}$) que luego fue modificada por otra ($2\frac{1}{2}$), dando por resultado una cantidad final que es precisamente la que se les pide; a partir de esta interpretación, deberían definir el procedimiento a utilizar: una sustracción o adición, por ejemplo. Por cierto, este tipo de situaciones no resultan nuevas para los estudiantes, pues ya las abordan con números naturales desde segundo grado.

En la evaluación realizada, posiblemente gran parte de ellos no dieron importancia a la comprensión de la situación y casi inmediatamente decidieron el procedimiento. Además, podría haber existido cierta interferencia por la presencia de números mixtos, especialmente si no tuvieron la oportunidad de abordarlos en clase o esta fue insuficiente.

En la imagen adjunta, no solo se aprecia un error de interpretación de la situación, sino también en el procedimiento de cálculo. Se transforman los números mixtos a fracciones y estas se adicionan defectuosamente, sumándose directamente tanto numeradores como denominadores, como si fueron números naturales independientes entre sí. Asimismo se ignora la verificación de la validez de la respuesta.

Francisco tenía $5\frac{3}{4}$ kg de manzana. Luego, utilizó $2\frac{1}{2}$ kg de manzana para preparar un pastel. ¿Cuántos kilogramos de manzana le quedan?

Escribe aquí tu procedimiento

$$5\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} = \frac{22}{4} + \frac{5}{2} = \frac{42+9}{6} = \frac{51}{6}$$

Respuesta: le quedan kg de manzana $\frac{51}{6}$

En las siguientes imágenes se aprecia que no hay ni siquiera una ligera aproximación a la comprensión de la situación propuesta.

Escribe aquí tu procedimiento

$$12 + 5 = 17$$

Respuesta: en total le sobran 17 Manzanas

Escribe aquí tu procedimiento

$$\begin{array}{r} 531 \\ - 242 \\ \hline 289 \end{array}$$

Respuesta: de manzana le quedan 289 manzanas

Las dificultades en el aprendizaje de las fracciones podrían ser superadas si se logra:

- Abordar sistemáticamente situaciones cercanas a los estudiantes que requieran un uso pertinente de las fracciones, de modo que provoquen su curiosidad y atención.
- Elaborar cuidadosamente la presentación inicial de cada noción estableciendo conexiones a esta, de todo desarrollo posterior.

3.1.3 Sugerencias para el tratamiento de esta dificultad

Las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones fundamentalmente se relacionan con la comprensión de este concepto, con el manejo de sus diversas representaciones, y con el uso eficaz de estrategias y técnicas de cálculo. A continuación, se precisan algunas sugerencias para la actuación docente en los ámbitos mencionados.

Sobre la comprensión de los estudiantes del concepto de fracción

- › Evidenciar la necesidad de un uso pertinente de las fracciones en situaciones cercanas a las experiencias de vida, las necesidades y las expectativas de los estudiantes. Seleccionar y adecuar situaciones reportadas en diarios, revistas, radio e Internet con fines de enseñanza. Utilizar principalmente fracciones de uso común referidas a mitades, tercios, cuartos, quintos, octavos, décimos y centésimos.

- › Liping Ma (2010) destaca la importancia del momento en que se presenta un concepto por primera vez. Según la experiencia de los profesores chinos, mientras más sólido sea el primer aprendizaje básico, este podrá brindar mayor sustento a aprendizajes posteriores más complejos de dicho concepto. Esta práctica sería altamente beneficiosa si se aplicara en la construcción progresiva del concepto de fracción.
- › Acerca de la construcción de diferentes nociones involucradas en el concepto de la fracción, Llinares y Sánchez (1997) recogen, a partir de elaboraciones previas, las siguientes recomendaciones en la secuencia de enseñanza:
 - Identificar el número de unidades y las cantidades mayores o menores que la unidad.
 - Identificar partes de la unidad usando materiales concretos. Además, dividir la unidad en partes iguales.
 - Establecer oralmente el nombre de las fracciones; usar las fracciones para responder a ¿cuántos?; buscando que los estudiantes comprendan que las fracciones son necesarias para expresar cantidades en situaciones donde los números naturales no son suficientes. De esta forma los estudiantes identificarán cantidades menores a la unidad, mayores que esta e identificarán fracciones iguales a la unidad.
 - Escribir fracciones para representar partes de la unidad. Efectuar traslaciones entre las representaciones: de forma oral a escrita y viceversa, de una forma concreta a escrita y viceversa.
 - Representar fracciones con dibujos: hacer una transición de la representación con objetos a diagramas y utilizar estos para efectuar todo lo indicado en los pasos anteriores.
 - Ampliar la noción de fracción: fracciones mayores que la unidad, los números mixtos, modelo con cantidades discretas, comparación de fracciones y las fracciones equivalentes.
- › En la secuencia didáctica, las fracciones referidas a cantidades continuas usualmente se introducen primero, debido a su menor dificultad para comprenderlas y representarlas. Sin embargo, también es indispensable desarrollar actividades similares con cantidades discretas, porque solo el trabajo con

ambos tipos de cantidades, posibilitará la comprensión del significado de la fracción.

- » En la construcción del concepto de fracción, inicialmente se parte de situaciones que relacionan la parte con un todo, como fracción propia, con énfasis en las nociones de numerador y de denominador, y a las fracciones unitarias (un medio, un tercio, un cuarto, etc.).

En este propósito, se debe procurar que las actividades propuestas enfatizen la relación parte-todo y no el simple conteo automático de partes ya delimitadas. Así, se exige que sea el estudiante quien determine la relación entre la parte y el todo cuando se proponga determinar qué parte de la siguiente barra está pintada:



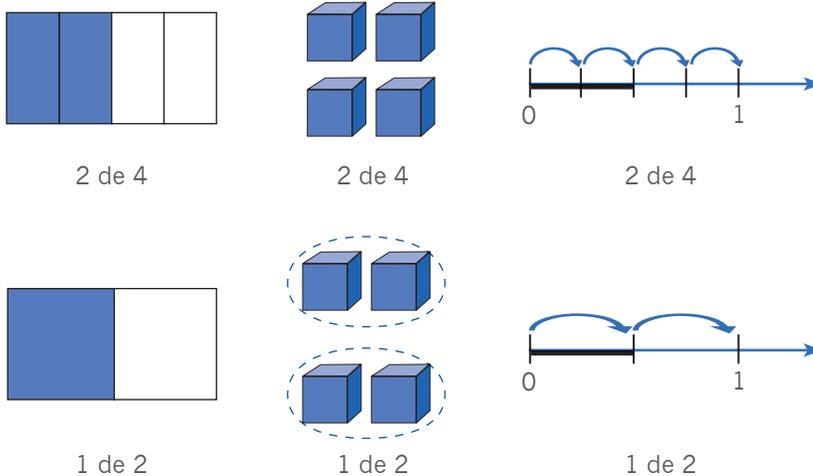
Lo anterior se lograría analizando cuántas veces está contenida la parte pintada en la unidad (la barra en este caso), procedimiento que puede realizarse con una estimación.

Sobre la base de los avances en la construcción de la fracción como relación parte-todo o paralelamente a este proceso, se proponen situaciones que introducen el significado de fracción como reparto equitativo o división indicada; en cuanto a sus otros significados, progresivamente se abordarán situaciones que la involucren como medida y como operador, respectivamente. Además, debe atenderse los usos de la fracción como razón.

- » Favorecer la vinculación de las fracciones con los números decimales, con énfasis en el significado antes que en el procedimiento usado para pasar de una representación a la otra.

Respecto al manejo de las diferentes representaciones de las fracciones

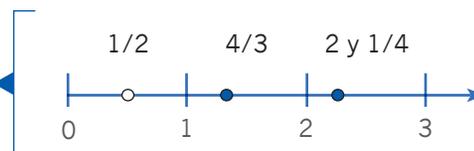
- › Presentar, cuando se introduce una nueva noción o relación, un primer acercamiento mediante material concreto o una escenificación; luego, desarrollar su representación gráfica y verbal. Finalmente, expresarla mediante símbolos.
- › Utilizar representaciones equivalentes y variadas, pues enriquecerán la comprensión de la noción de fracción y de la equivalencia de fracciones. Por ejemplo en cada uno de los siguientes casos, ¿qué parte del total es lo coloreado de azul?



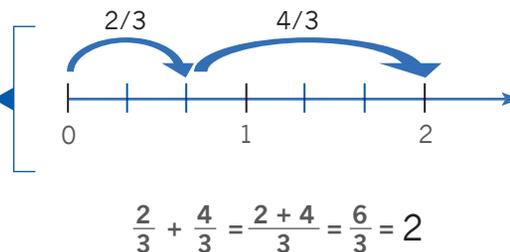
Se aprecia que $\frac{2}{4}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$.

- › Utilizar diversidad de representaciones gráficas, dando oportunidad a que los estudiantes exploren si la noción de fracción depende o no del tipo de gráfico elegido, de la posición de la figura total o de la ubicación de las partes y, cuando se trata de una cantidad discreta, de la manera cómo se conforman las partes.
- › Evaluar la pertinencia de la representación de las fracciones haciendo uso de la “recta numérica”.

La correspondencia entre una fracción y un punto de la recta puede ayudar a la comprensión de las fracciones impropias, de las fracciones propias o de los números mixtos.



La representación de fracciones como desplazamientos en la “recta numérica” puede facilitar la comprensión de operaciones con fracciones.



En cuanto a la construcción del significado esencial de las operaciones con fracciones

- › Las situaciones problemáticas deben ser seleccionadas evaluando si proporcionan los contextos necesarios para hacer necesaria y viable una operación; estas facilitan la construcción del significado de la operación y los consiguientes procedimientos de cálculo.
- › Priorizar la construcción del significado de la operación, ya que se justifica su elección como procedimiento pertinente ante un problema planteado. Además, sirve para orientar la elaboración de procedimientos de cálculo y el desarrollo de destrezas que permitan la obtención de los resultados solicitados.
- › Estimular a los estudiantes y darles oportunidades para que presenten estrategias o técnicas propias, heurísticas, para resolver problemas; seleccionar algunas de estas y ponerlas a consideración de toda la sección. El trabajo sistemático con algoritmos conocidos de cálculo se puede posponer hasta que hayan asimilado el significado de la operación; estos podrían considerarse como el resultado final en la evolución de las estrategias personales.

- › Proponer situaciones que permitan comparar la multiplicación o la división de números naturales con la multiplicación o la división de fracciones, estableciendo relaciones entre los factores y el producto. Plantear preguntas como ¿el producto es siempre mayor que los factores?, ¿el cociente es siempre menor que el dividendo?
- › Prestar atención a los errores sistemáticos que cometen los estudiantes. Evaluar si se relacionan principalmente con la comprensión conceptual o con la elaboración personal de técnicas operativas de cálculo, con la modificación defectuosa o con el olvido de alguna técnica desarrollada en clase o en el entorno escolar. Una manera de corregir estos errores es provocar un conflicto cognitivo de modo que el estudiante comprenda que existe una contradicción entre su modo de proceder y la realidad.

3.2 Dificultades para interpretar y construir patrones

3.2.1 ¿Qué deberían aprender los estudiantes acerca de los patrones?

En el mundo real, muchas situaciones se vinculan con regularidades. Las etapas de crecimiento de una planta, las fases de la luna, las imágenes que contienen guardillas de un muro, los pasos de algunas danzas o el periodo de tiempo que transcurre para tomar una medicina son casos que presentan regularidades que se cumplen por ciclos y donde se observa cierta periodicidad de repetición.

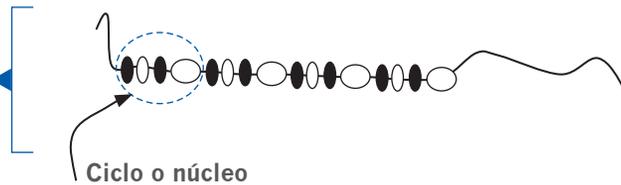
Asimismo, hay situaciones con crecimiento o disminución de cantidades, como el peso de un niño durante el primer año de vida, los horarios de salida de buses en una estación, los valores del producto en una tabla de multiplicar o el área de un cuadrado cuando se duplica la medida de sus lados. En estos casos, se pueden describir los aumentos, las disminuciones o las transformaciones que se manifiestan de manera ordenada en una regularidad, para luego expresarla como una regla que sirva para predecir y generalizar la ocurrencia de similares hechos futuros.

Un tipo especial de regularidades lo constituyen los patrones; estos se presentan en situaciones naturales del entorno y en otras propias de la Matemática. Así tenemos:

Regularidades encontradas:

- Desde el cuarto lugar y cada cuatro lugares se usa una piedra más grande de color blanco.
 - Los colores de las piedras se intercalan (negro, blanco, negro, blanco,...)
- Las piedras pequeñas, que van inmediatamente antes o después de una piedra grande, son negras.

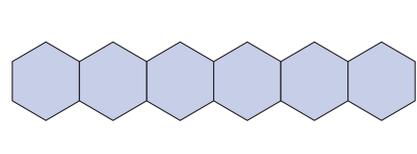
- **Patrón de repetición:** puede ser identificado cuando los elementos de una secuencia se presentan en forma periódica. Se considera el ciclo o núcleo que se repite varias veces en su estructura. Ejemplo: el arreglo de las piedras en un collar.



- **Patrón de recurrencia:** puede ser identificado cuando cada término de la secuencia creciente o decreciente es expresable en función de los anteriores; y de su análisis se infiere la ley de formación. Por ejemplo, se quiere hallar el perímetro de la figura siguiente cuando tiene cierta cantidad de piezas similares que la conforman. Se sabe que cada lado de una pieza mide 1 unidad (1 u).

Regularidades encontradas:

- Cada pieza tiene un solo lado común con la siguiente, el cual se ubica al interior de la figura.
- El perímetro de solo 1 pieza es 6 u.
El perímetro de 2 piezas juntas es 10 u.
El perímetro de 3 piezas juntas es 14 u.
- Por cada pieza adicional, el perímetro aumenta en 4 u.
- Para 3 piezas, el perímetro es 6 u y 2 veces 4 u, es decir $6\text{ u} + 2 \times 4\text{ u}$.
Para 4 piezas, el perímetro es 6 u y 3 veces 4 u (se considera 6 u más tantas veces 4 u como una unidad menos que la cantidad de piezas dadas).
Para 8 piezas, el perímetro es $6 + 7 \times 4 = 6 + 28 = 34\text{ u}$



Desde esta perspectiva, en toda la escolarización (primaria y secundaria) la forma como debe abordarse el estudio de los patrones va desde la asociación intuitiva hasta la expresión formal de la regla o las reglas que caracterizan cierta secuencia. Si se tiene una secuencia gráfica o numérica, los estudiantes deberían observar la conformación de esta en su totalidad, realizar comparaciones entre los términos contiguos encontrando semejanzas y diferencias, o identificar la relación que existe entre cada término y la posición que este ocupa en dicha secuencia. En primaria, este desarrollo se puede presentar paulatinamente hasta un nivel de generalización que permita hallar un término no inmediato o la verbalización de reglas. También se espera que empleen de modo flexible una expresión numérica, gráfica o verbal, entre otras, para la representación del patrón. Por último, deberían ser capaces de verificar si el patrón propuesto se ajusta, o no, a cada uno de los términos de la secuencia que está siendo estudiada.

3.2.2 ¿Cómo se expresan las dificultades de los estudiantes?

Las respuestas de los estudiantes indican que tienen dificultades para identificar el patrón en una situación dada, ya sea al reconocer cómo se genera un término en relación con el anterior o al asociar un término con su posición.

Una de las posibles razones de las dificultades mencionadas es que el estudiante trabaja a partir de la secuencia numérica dada y no presta debida atención a las relaciones que debe establecer entre los distintos elementos observados en la secuencia. Por tanto, se centra en el cálculo, buscando establecer qué cantidades, adicionadas, restadas o multiplicadas, permiten obtener el resultado esperado, y no analiza la relación entre los elementos que conforman la situación real o simulada.

Por otro lado, se ha encontrado que algunos estudiantes aplican nociones aprendidas que no se ajustan a la situación que están resolviendo, lo que origina su error. Por ejemplo, suelen utilizar la noción de proporcionalidad para encontrar un término distante en una secuencia; así, consideran que si en una pieza el perímetro es 6 u, en 8 piezas el perímetro seguramente será $8 \times 6 = 48$ u, ignorando u obviando cómo afecta el proceso de composición

Las dificultades en torno a los patrones podrían originarse porque el estudiante se centra en buscar qué cantidades, adicionadas, restadas o multiplicadas, permiten obtener el resultado esperado, y no analiza la relación entre los elementos que conforman la situación real o simulada.

de figuras al perímetro de la figura resultante. El razonamiento incorrecto que se deriva de lo anterior es que si se multiplica por 8 la posición del término, también se multiplicará por 8 el perímetro de la figura compuesta.

Otra dificultad de algunos estudiantes consiste en no poder expresar el patrón mediante palabras o representaciones gráficas; esto puede ocurrir debido a que se están enfatizando los procedimientos algorítmicos, en lugar de una cabal comprensión del patrón en el proceso de formación, objetivo cuyo logro permite expresarlo mediante enunciados, dibujos, tablas o esquemas.

Asimismo se encuentra un grupo de estudiantes que generan conjeturas de generalización pero que no las comprueba, concluyendo en afirmaciones ligeras y erradas.

A continuación, se analizan algunas preguntas de la prueba aplicada, en las cuales se han evidenciado dificultades en la interpretación y en la construcción de patrones.

Ejemplo de dificultades en la interpretación y en la construcción de patrones – Pregunta 3

Cecilia observa que su maestra utiliza ganchos para colgar las hojas de trabajo de sus compañeros de la siguiente manera.



Luego, Cecilia elabora la siguiente tabla:

Cantidad de hojas de trabajo	1	2	3	4
Cantidad de ganchos utilizados	4	6	8

Si ella sabe que la maestra va a colgar 20 hojas de trabajo, ¿cuántos ganchos utilizará?

- a) 80 ganchos.
- b) 50 ganchos.
- c) 42 ganchos.
- d) 12 ganchos.

Ficha técnica

Capacidad: Razonamiento y demostración

Contenido: Patrones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: Suficiente

Medida: 523

Resultados según respuesta de los estudiantes

Tipo de respuesta	Alternativa	%
Correcta	c	44,3
Incorrecta	a	22,1
	b	13,2
	d	18,5
No válida*		1,9

* Las respuestas no válidas incluyen la multimarca (más de una alternativa marcada) y las omisiones ("preguntas en blanco").

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la interpretación de una secuencia numérica a partir del reconocimiento de patrones aditivos y/o multiplicativos inherentes a una situación, y la determinación del término solicitado.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

A partir del soporte gráfico (hojas sostenidas por los ganchos) y de la tabla de datos, el estudiante puede establecer, en diversas formas, una relación entre la cantidad de hojas y la cantidad de ganchos utilizados.

Procediendo en relación con el término anterior, el estudiante puede expresar que se utilizan dos ganchos más por cada hoja que cuelgue. Luego, podría construir una secuencia con la cantidad de ganchos utilizados: 4, 6, 8, 10, 12...; de modo que, al completar los 20 términos, que corresponderían a las 20 hojas colgadas, reconoce que se utilizarán 42 ganchos.

Asociando el término con su posición, el estudiante relaciona la cantidad de ganchos usados con el número de hojas colgadas. Así, a partir del análisis del gráfico puede indicar diferentes formas de expresar el patrón. Por ejemplo, una de ellas es encontrar que en 1 hoja se utilizan 2 pares de ganchos; en 2 hojas, 3 pares; y en 4 hojas, 5 pares. Aquí podría plantear como conjetura que por cierta cantidad de hojas colgadas, utilizará una unidad más de pares de esa cantidad en ganchos. Luego verifica, gráficamente o en la tabla, que por 5 hojas colgadas se utilizará 6 pares de ganchos, como también que por 6 hojas colgadas se utilizará 7 pares de ganchos. Finalmente, el estudiante puede aplicar la pauta o regla hallada y calcular que para 20 hojas se utilizarán 21 pares de ganchos, es decir, 42 ganchos.

Es importante que el estudiante observe la secuencia gráfica, la relacione con la secuencia numérica presentada en la tabla y encuentre regularidades entre los términos, de modo que pueda formular una conjetura acerca de la regla de formación; esta debe ser probada con varios términos, para así poder extender la regla a cualquier otro de la secuencia. De esta manera, el estudiante va desarrollando un proceso de generalización en relación con las regularidades encontradas.

¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?

Interpretan incorrectamente la situación y aplican relaciones multiplicativas

Un considerable 22,1% de los estudiantes marca la alternativa “a) 80 ganchos”; este error se debe a una interpretación incorrecta de la situación: al parecer no se percatan de que dos hojas contiguas comparten ganchos; de modo que en el caso de 2 hojas utilizan solo 6 ganchos y no 8, porque 2 de ellos son comunes a ambas hojas. Estos estudiantes podrían hacer uso de sus nociones multiplicativas de la siguiente forma: en 1 hoja se utiliza 4 ganchos; en 2 hojas, 8; en 3 hojas, 12; y en 20 hojas se utilizarán 80 ganchos. Sin embargo, este modelo multiplicativo los conduce al error; esto se puede corroborar en la siguiente tabla:

Una de las dificultades en el reconocimiento y uso de una regularidad podría estar vinculado a que en el formato de tablas los estudiantes usualmente trabajan actividades relacionadas con la proporcionalidad; en consecuencia tienden a utilizar irreflexivamente modelos multiplicativos para toda regularidad.

Cantidad de hojas		1	2	3	4	5	6
Cantidad de ganchos	Modelo proporcional (equivocado)	4	8	12	16	20	24
	Situación real	4	6	8	10	12	14

Identifican un patrón aditivo, pero luego aplican inadecuadamente relaciones de proporcionalidad

El 13,2% de los estudiantes marca como respuesta la alternativa “b) 50 ganchos.” Probablemente estos identificaron que el aumento de los ganchos va de dos en dos, por lo que asocian 10 ganchos para 4 hojas de trabajo. Luego, establecen una relación de proporcionalidad, no pertinente para esta situación, y encuentran que 50 es la cantidad de ganchos que se necesitarán para 20 hojas. Este resultado evidencia, además, que tampoco verifican si las 50 hojas cumplen con el patrón aditivo que probablemente identificaron al inicio. A continuación, se expresa en la tabla lo que pudo haber sucedido.

Cantidad de hojas de trabajo	1	2	3	4	...	20
Cantidad de ganchos utilizados	4	6	8	10	...	50
		+2	+2	+2	x5	

“Si para colgar 4 hojas se necesitan 10 ganchos, entonces para 20 hojas se necesitarán 50 ganchos.”

Tal vez la tabla mostrada les parezca familiar y la asumen como una tabla de proporcionalidad al momento de buscar cuántos ganchos utilizarán para 20 hojas.

Identifican un patrón aditivo, pero solo para completar la tabla

Finalmente, el 18,5% de los estudiantes marcó como respuesta la alternativa “d) 12 ganchos”; ellos también habrían logrado identificar que la cantidad de ganchos aumenta de dos en dos, pero se limitaron a completar la tabla de datos y solo encontraron el término siguiente de los datos proporcionados. Se podría deducir que este grupo de estudiantes interpretaron parcialmente la tarea a realizar o que su práctica frecuente en tablas de secuencias suele ser “encontrar el número que sigue”.

Ejemplo de dificultades en la interpretación y en la construcción de patrones – Pregunta 9

Observa la siguiente secuencia y escribe el número que sigue.

3, 8, 13, 18, 23, _____

Ahora explica cómo encontraste dicho número.

Ficha técnica

Capacidad: Razonamiento y demostración

Contenido: Patrones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de Logro: En inicio

Medida: 324

Resultados según respuesta de los estudiantes

Correcto (crédito completo): Escribe “28” como término siguiente y explica cómo lo encontró.	86,7%
Parcialmente correcto (crédito parcial): Encuentra el patrón, pero no el término siguiente o se equivoca al indicarlo. En otros casos, escribe “28” pero no explica cómo lo encontró.	7,7%
Incorrecto (sin crédito):	4,7%
Respuesta omitida (sin crédito):	0,9%

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la interpretación de una secuencia numérica a partir del reconocimiento de patrones aditivos y/o multiplicativos inherentes a ella, y la determinación del término solicitado.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

El estudiante tendrá que identificar la pauta de comportamiento o cambio de los términos, de modo que infiera cómo obtener el siguiente valor de la secuencia para después explicar el proceso que le permitió encontrar dicho número. En esta labor se espera que, después de analizar la secuencia, el estudiante se plantee conjeturas y las compruebe con los términos conocidos.

El estudiante puede identificar un patrón aditivo, donde cada nuevo término se encuentra sumando 5 al término anterior, o, alternativamente, un patrón por la forma de conformación de sus cifras de decenas y de unidades.

¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?

Indican el término que sigue en la secuencia, pero no explican cómo lo encontraron, o, cuando explican cómo se forma la secuencia, no indican el valor del término que sigue.

A pesar de que la tarea es de baja complejidad, un 7,7% de los estudiantes solo respondió a la consigna de encontrar el término que sigue en la secuencia; pero estos no manifestaron una explicación

Posiblemente los estudiantes tienen poca oportunidad de realizar explicaciones o justificaciones en las actividades que realizan.

o un argumento sobre cómo encontraron el patrón. En otros casos, explican cómo encontraron el patrón; pero finalmente no indican cuál es el término que sigue en la secuencia. Posiblemente una de las razones de la situación anterior es la poca oportunidad que tienen de realizar explicaciones o justificaciones en las actividades cotidianas de aula.

Observa la siguiente secuencia y escribe el número que sigue.

3, 8, 13, 18, 23, 28

Ahora explica cómo encontraste dicho número.



Interpretan inadecuadamente el patrón

Asimismo, un 4,7% de los estudiantes tiene dificultades para interpretar el patrón, por lo que no determinaron de manera correcta el número que sigue en la secuencia.

Aparentemente los porcentajes mostrados (7,7%; 4,7%) no son significativos; sin embargo, si acumulamos los porcentajes de crédito parcial, sin crédito y omitidos, estaríamos ante un 13% de estudiantes que todavía tienen dificultades para resolver las dos tareas básicas propuestas: encontrar el término siguiente y explicarlo.

Por último, se ha podido notar que gran número de estudiantes pocas veces hace uso de las palabras para expresar un patrón. El ejemplo que se presenta es uno que nos muestra el uso de expresiones verbales. Un numeroso grupo de estudiantes recurre a utilizar expresiones numéricas u operativas, tal vez motivados

por la fuerte influencia del número y del algoritmo en las tareas matemáticas que realizan en clase; esto podría denotar posteriores dificultades para comunicar ideas matemáticas de manera escrita y, posiblemente, también en forma oral.

Observa la siguiente secuencia y escribe el número que sigue.

$$3, 8, 13, 18, 23, \underline{28}$$

Ahora explica cómo encontraste dicho número.

Lo encontré sumando cada número +5

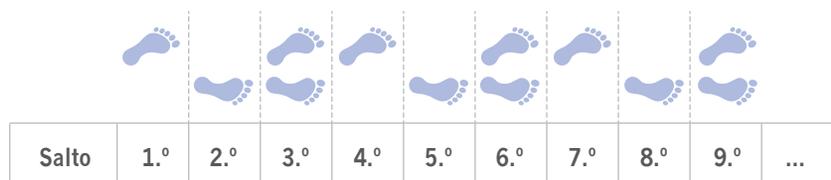
$$\begin{array}{r} 23 + \\ 5 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 + \\ 5 \\ \hline 28 + \\ 5 \\ \hline 33 + \\ 5 \\ \hline 38 + \\ 5 \\ \hline 43 + \\ 5 \\ \hline 48 + \\ 5 \\ \hline 53 + \\ 5 \\ \hline 58 + \\ 5 \\ \hline 63 + \\ 5 \\ \hline 68 + \\ 5 \\ \hline 73 + \\ 5 \\ \hline 78 + \\ 5 \\ \hline 83 + \\ 5 \\ \hline 88 + \\ 5 \\ \hline 93 + \\ 5 \\ \hline 98 + \\ 5 \\ \hline 103 + \\ 5 \\ \hline 108 + \\ 5 \\ \hline 113 + \\ 5 \\ \hline 118 + \\ 5 \\ \hline 123 + \\ 5 \\ \hline 128 \end{array}$$

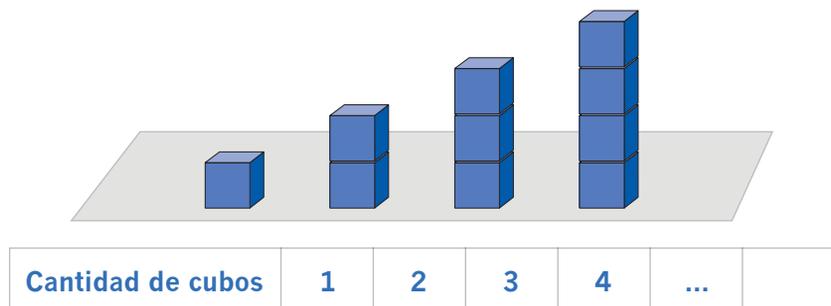
3.2.3 Sugerencias para el tratamiento de esta dificultad

El tratamiento de los patrones debe darse desde los primeros grados de la escolaridad, ya que supone para el niño el primer paso hacia la matematización. En esta labor, los estudiantes aprenden a encontrar relaciones, establecer conexiones, hacer generalizaciones y predicciones sobre sucesos de su entorno.

Desde esta perspectiva, los estudiantes deben afrontar situaciones que generan patrones de repetición, cuyos elementos se presentan en forma periódica, prestando especial atención a la base o núcleo que se repite varias veces en su estructura. En el ejemplo que sigue, se consideran las huellas que deja cierto niño al saltar en la arena: este salta y al caer solo pisa con el pie izquierdo, salta nuevamente y al caer solo pisa con el pie derecho, luego salta y al caer se apoya en los dos pies; y así sucesivamente, repite sus saltos y sus respectivas caídas.



Asimismo, los estudiantes de sexto grado también deben enfrentar situaciones que involucran patrones de recurrencia, en los cuales el núcleo cambia con regularidad y cada término se va expresando en función de los anteriores; de modo que se puede inferir una ley de formación. Esto ocurre, por ejemplo, cuando armamos torres con cubos, sobre una mesa, y lo hacemos con una regularidad creciente, aumentando un cubo en cada torre siguiente.



Gowar, Graham, Mason y Pimm (como refiere Arriaga, 2008) sostienen que la generalización es el punto de partida hacia la abstracción matemática y que aquella puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones y regularidades; para ello, señala cuatro etapas al trabajar en el salón de clases.

- a. Percibir un patrón. Se presentan actividades con secuencias de figuras o de números, donde se solicita al estudiante hallar la figura o el número siguiente. Para solucionarlos, el estudiante observa y analiza qué está pasando al transitar de una figura a la otra, o de un número al siguiente; así, logra percibir la regularidad.
- b. Expresar un patrón. Es necesario que el estudiante exprese qué observó, intercambiando percepciones y hallazgos, hasta llegar a un acuerdo; en ese proceso, puede reconocer si sus reflexiones son correctas o no.
- c. Registrar el patrón. Esto hace posible la verificación de la regla. Puede ser apoyado por dibujos, símbolos o palabras que, posteriormente, sirvan para describir las variables claves del problema.
- d. Probar la validez de las fórmulas. Para que una fórmula tenga validez, se debe probar de diferentes formas; por ejemplo, probando con cada elemento, realizando cálculos, dibujando, contando o verificando su consistencia. Es importante que se aprecie cómo un ejemplo particular puede mostrar lo general.

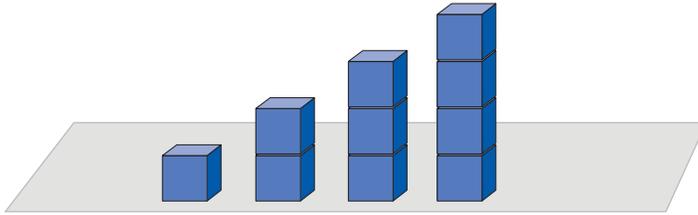
A continuación, se presenta estas cuatro etapas considerando el ejemplo referido a los saltos en la arena, que se presentó en la explicación del patrón de repetición. Los estudiantes pueden simular la situación, replicarla varias veces, hacer una representación gráfica del hecho y, con esta, comenzar su análisis.

Percibe un patrón	Expresa un patrón	Registra un patrón	Prueba la validez de la fórmula
En esta secuencia se repiten los elementos (huellas) en forma periódica.	Cada tres saltos, las huellas forman un ciclo. “Pie izquierdo, pie derecho y los dos pies.”	“Al numerarse las huellas, todas aquellas que resulten ser múltiplos de 3 corresponden a los dos pies” (escrito con palabras) I – D – 2P (escrito usando iniciales)	La huella 15 corresponde a los dos pies, por ser 15 un múltiplo de 3. La huella 20 no corresponde a los dos pies, por no ser 20 un múltiplo de 3.

Cuando los estudiantes formulan conjeturas, es importante orientarlos con preguntas para que las verifiquen, no solo ampliando la secuencia de uno en uno, sino buscando otros casos similares con relación a lo que afirman. Por ejemplo, una forma de verificar la siguiente conjetura: “Si el 5.º salto deja huella del pie derecho, entonces el 10.º salto también deja huella del pie derecho, porque 10 es el doble de 5”, es sugerir que extiendan la secuencia hasta el 10.º término; así, encontrarán que el 10.º salto deja huella del pie izquierdo, no del derecho. En situaciones como esta, es muy importante que los estudiantes expresen sus formas de pensar, conjeturas o conclusiones, y la forma como comprueban sus resultados.

Ahora, se explicarán estas cuatro etapas considerando el ejemplo referido a las torres de cubos, ya presentado como un patrón de recurrencia. En primer lugar, es necesario que los estudiantes observen y comprendan la situación; para ello, se puede representarla, incluso con material concreto, como cubitos de “material base 10” o dados. Así, sobre una mesa pueden armar las torres de cubos. Luego, a partir de preguntas pueden fijar el elemento o atributo que se quiere analizar. Por ejemplo, en la situación indicada el estudiante puede explorar regularidades en la cantidad de cubos en cada torre, en la cantidad de caras visibles en cada torre o, dada la medida de la arista, en el área total o en el volumen de cada torre. Elegida la cantidad de caras visibles en cada torre como el objeto de análisis, se pide determinar cuántas hay en una torre de 8 cubos, precisando que al hablar de caras se refiere a las de cada uno de los cubitos.

Se observa la cantidad de caras visibles de los cubos que conforman las primeras torres.



Cantidad de cubos	1	2	3	4	...	8
Cantidad de caras visibles	5	9	13		...	

Luego, para cumplir la tarea se elabora una tabla que organice los datos.

Percibe un patrón	Expresa un patrón	Registra un patrón	Prueba la validez de la fórmula
Esta secuencia crece de una manera uniforme; siempre se agrega un cubo que, a su vez, incrementa las caras visibles.	Por cada cubo que se agrega, la cantidad de caras de la torre aumenta en cuatro caras.	<p>“Para encontrar el siguiente término, le tengo que sumar 4 al anterior”</p> $5 + 4 = 9$ $9 + 4 = 13$ $13 + 4 = 17 \dots$	<p>Continúa sumando al anterior...</p> $17 + 4 = 21$ $21 + 4 = 25$ $25 + 4 = 29$ $29 + 4 = 33$
		<p>“1 cubo tiene visibles 4 caras más una tapa” (cara superior de la torre).</p> <p>“2 cubos tienen 2 veces 4 caras, más una tapa”</p> <p>“3 cubos tienen 3 veces 4 caras, más una tapa”</p> <p>“4 cubos tienen 4 veces 4 caras, más una tapa”</p>	<p>Entonces, 8 cubos tendrán 8 veces 4 caras, más una tapa. Esto es:</p> $8 \times 4 + 1 = 33$ caras visibles.

Es conveniente que el estudiante exprese sus intentos de generalización, ya sea en forma oral, gráfica o simbólica, pues ello le permite interactuar en un grupo para analizar y verificar su conjetura, de modo que pueda validarla.

Para evitar errores recurrentes, es importante que los estudiantes verifiquen si su conjetura se cumple con varios elementos de la secuencia dada. Por otra parte, si no percibieran el error cometido, puede proponerle casos que al verificarlos demuestren que su conjetura falla (contraejemplos). Además, considere que la validez de la fórmula se puede realizar con cálculos aritméticos, con dibujos o contando.

Cabe precisar que el desarrollo de las tres primeras etapas propuestas por Mason no tiene que ser aplicado en forma consecutiva por el docente, pues ello dependerá de las necesidades del estudiante y del tipo de conjetura que este realice.

Finalmente, es necesario resaltar que las actividades referidas a regularidades y generalizaciones, debidamente justificadas, sirven para que el estudiante desarrolle su capacidad de razonamiento algebraico, la cual será relevante en los ciclos posteriores de la educación básica.

3.3 Dificultades para identificar y aplicar propiedades básicas de formas bidimensionales (figuras planas)

3.3.1 ¿Qué deberían aprender los estudiantes acerca de las formas bidimensionales?

Al observar su entorno, cada quien puede darse cuenta de que todo lo que nos rodea tiene una forma geométrica particular, con características y propiedades específicas que las hacen similares o diferentes a las demás. Cuando se identifica la simetría de una mariposa, se analiza la forma de un envase o se estima el área de un terreno, se comprueba la presencia de la geometría en situaciones de la vida cotidiana y el potencial que tiene esta en el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas tales como la visualización, la representación de figuras planas o sólidas, la elaboración de conjeturas y los argumentos que sustentan las relaciones entre sus elementos y sus propiedades.

Al finalizar la primaria, los estudiantes deberían ser capaces no solo de identificar de manera intuitiva distintas formas geométricas (como el triángulo, rectángulo, cuadrado, etc.), sino también de describir y de explicar sus elementos básicos como los lados, ángulos, vértices y diagonales. Asimismo, deberían interpretar las propiedades básicas que las caracterizan, como también comenzar a establecer algunas relaciones de inclusión entre figuras planas como los cuadriláteros o los triángulos.

Por otra parte, se espera que los estudiantes de sexto grado calculen y realicen estimaciones de medidas de ángulos, perímetros y superficies en unidades convencionales o arbitrarias (pasos, cuerdas, etc.), seleccionando el instrumento y la unidad más conveniente. Además, se espera que interpreten la relación entre el área y el perímetro de algunas figuras planas fundamentales.

Por último, los estudiantes que finalizan la primaria deberían ser capaces de identificar la ubicación de objetos, así como de realizar traslaciones y reflexiones de estos, a través de un plano de cuadrículas o en el primer cuadrante de un plano cartesiano. Además, deberían interpretar el uso de la proporcionalidad cuando se pide realizar la ampliación o la reducción de figuras en un plano de cuadrículas.

3.3.2 ¿Cómo se expresan las dificultades de los estudiantes?

Las principales dificultades evidenciadas por los estudiantes se relacionan con la identificación de figuras planas y la interpretación de sus respectivas propiedades, con la visualización de las figuras y de los sólidos, y con la solución de problemas geométricos, en especial cuando se requiere desarrollar una estrategia novedosa para su resolución. A continuación, se plantea una aproximación a estas dificultades, enfatizando dos aspectos: la construcción y el manejo de los conceptos geométricos, y la visualización de las formas geométricas básicas.

La elaboración de conceptos de las figuras geométricas muchas veces se realiza mediante actividades que enfatizan la memorización de la definición y de sus características. Sin embargo, este tipo de tratamiento no permite que los estudiantes interioricen de manera

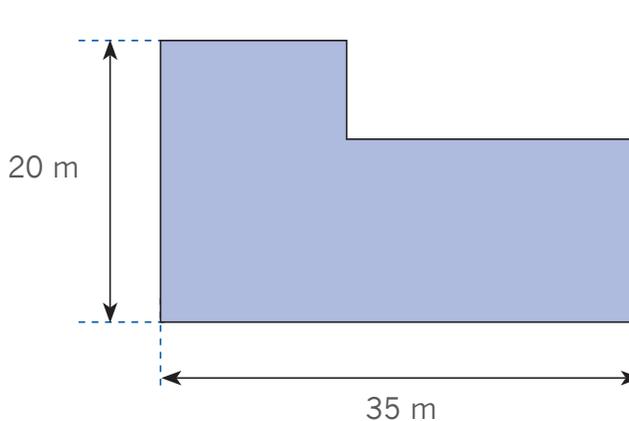
adecuada (a través de acciones y usando sus representaciones o imágenes mentales) un concepto geométrico.

En este marco, un débil desarrollo de la habilidad de clasificar constituye un factor que interviene en la dificultad para identificar figuras geométricas y sus propiedades básicas. Asimismo, una práctica que influye en el origen de esta dificultad es privilegiar actividades de asociación o emparejamiento entre una figura y su respectivo nombre; es decir, proponer actividades que solo fomentan una memorización para identificar y definir las figuras geométricas fundamentales con representaciones en posiciones establecidas que se repiten constantemente sin variación. Esta práctica no es suficiente y omite la necesaria exploración y la identificación de relaciones entre elementos al interior de estas, así como también entre distintas figuras.

Un débil desarrollo de la habilidad de clasificar –reconocer los grupos y el criterio que se toma en cuenta para esa agrupación– es un factor que genera dificultad en la identificación de figuras geométricas y sus propiedades básicas.

Las consecuencias de un enfoque inadecuado en la construcción y en el manejo de los conceptos se expresan en la comprensión parcial de estos y en su limitada aplicación en diversas situaciones. Un ejemplo podría evidenciarse en el tratamiento del perímetro, tal como se observa en la siguiente tarea: “¿Cuántos metros de malla metálica se necesitaría como mínimo para cercar el terreno mostrado?”

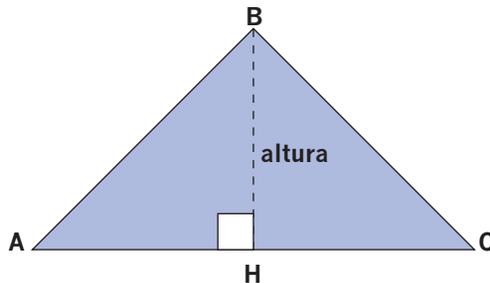
En esta situación no es suficiente que los estudiantes recuerden que el perímetro es la suma de las medidas de los lados del terreno mostrado. ¿Será necesario, en este caso, saber cuánto mide cada lado de este terreno?



Ante esta situación, la memorización mecánica de la definición de perímetro no permitiría resolver la tarea propuesta.

Por otra parte, cuando los estudiantes comprenden solo parcialmente el concepto de una figura geométrica, ignoran algunas de sus propiedades o asumen que estas se cumplen para todas las figuras de características similares. Por ejemplo,

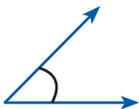
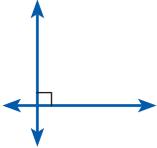
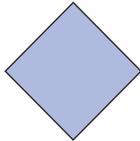
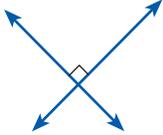
es usual que en un triángulo los estudiantes identifiquen como única altura a aquella que “descansa sobre la base”, ignorando las otras dos alturas que son relativas a los otros lados. Se evidencia que el concepto de altura no ha sido correcto o completamente construido.



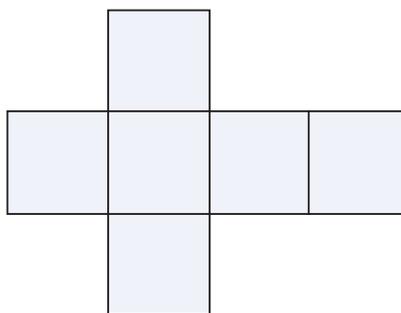
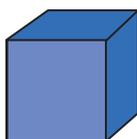
En cuanto a la habilidad de visualización de formas geométricas básicas, no solo se refiere a la acción de observar figuras u objetos geométricos, sino que trasciende estas. Implica reflexionar sobre dichos objetos, imaginar y representar mentalmente su estructura desde distintos puntos de observación, así como sus posibles transformaciones (por ejemplo, la traslación); esto supone que los estudiantes van construyendo una imagen más compleja de la que a simple vista pueden apreciar. La capacidad de ver más allá de lo descriptivo en un dibujo geométrico, identificando propiedades y comprendiendo su interrelación, resume lo fundamental que puede lograrse a partir de la visualización.

A continuación, se describen aquellas dificultades, evidenciadas en la evaluación, que se relacionan con la visualización de figuras geométricas.

- La orientación de una figura. Durante el proceso de visualización, los estudiantes deberían explorar y discriminar algunas condiciones o caracterizaciones que no son peculiares o específicas del concepto correspondiente a figura geométrica: una de ellas es la orientación o posición de la figura, que originará dificultades al ser ignorada o subestimada. Se puede observar, por ejemplo, como los ángulos suelen ser frecuentemente presentados con un lado horizontal paralelo al borde de la pizarra o del libro, lo cual induce a que los estudiantes cometan el error de incluir en su esquema conceptual que un ángulo siempre tiene que ser dibujado con un lado horizontal. Una situación similar ocurre con otras figuras geométricas, como se observa en el siguiente cuadro:

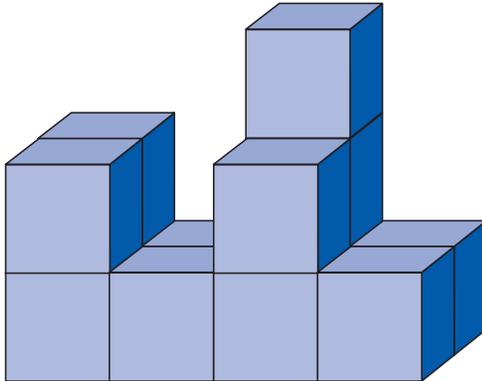
	Ángulo	Cuadrado	Rectas perpendiculares
Orientación habitual en su presentación	 <p>Ángulo con un lado horizontal</p>	 <p>Cuadrado con base horizontal</p>	 <p>Rectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical</p>
Orientación no habitual en su presentación	 <p>Ángulo con lados no horizontales</p>	 <p>Cuadrado con lados oblicuos</p>	 <p>Rectas perpendiculares, ambas oblicuas</p>

- El plegar y desplegar (desarrollo planar de un sólido). Para resolver esta tarea, no solo es necesario conocer qué es un desarrollo planar, sino también determinar las propiedades que conserva con respecto al objeto geométrico (por ejemplo, el paralelismo de las aristas de las caras, la forma y el tamaño de las caras). Una de las dificultades para resolver tareas de desarrollo planar es que en estas representaciones se produce una duplicidad de algunos elementos del cuerpo tridimensional, es decir que un elemento del sólido, al ser representado en el plano, se tiene que repetir dos veces. Así, alguna arista de un cubo puede ser representada por dos segmentos, que corresponden a aquellos que se unen al plegar el desarrollo planar.



- › El conteo de partes. En esta tarea se tiene que interpretar la representación del objeto y sus partes (los cubitos). La dificultad radica en determinar la estructura del sólido y distinguir las diferentes caras que pertenecen a uno o a otro cubito, tal como se aprecia en el siguiente ejemplo.

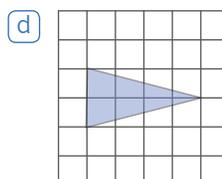
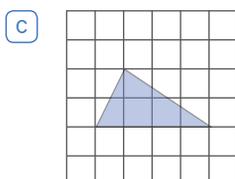
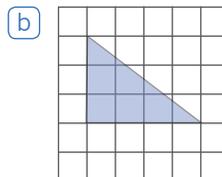
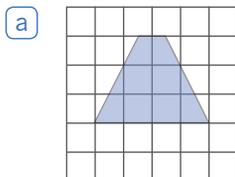
¿Cuánto será el volumen del siguiente sólido, si tenemos como unidad de medida a cada uno de los cubitos mostrados?



A continuación se analizan algunas preguntas de la prueba aplicada, en las cuales se han evidenciado las dificultades de los estudiantes.

Ejemplo de dificultades en la identificación y en la aplicación de propiedades básicas de formas bidimensionales (figuras planas) – Pregunta 12

Un triángulo es isósceles cuando dos de sus lados tienen la misma medida. ¿Cuál de las siguientes figuras sombreadas es un triángulo isósceles?



Ficha técnica

Capacidad: Razonamiento y demostración

Contenido: Geometría

Contexto: Disciplinar (intra matemático)

Nivel de Logro: Satisfactorio

Medida: 500

Resultados según respuesta de los estudiantes

Tipo de respuesta	Alternativa	%
Correcta	d	48,1
	a	32,6
	b	7,0
Incorrecta	c	10,7
	No válida*	1,6

* Las respuestas no válidas incluyen la multimarca (más de una alternativa marcada) y las omisiones (“preguntas en blanco”).

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa identificar triángulos de acuerdo con la medida de sus lados.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

A partir de la visualización de las figuras, primero identificar cuál o cuáles son triángulos; luego explorar las relaciones entre las medidas de los lados en cada uno, comparándolos, de modo que finalmente pueda determinar cuál de ellos cumple con la condición de ser un triángulo isósceles.

¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?**No pueden efectuar clasificaciones atendiendo a atributos perceptuales**

Un 32,6% marcó como respuesta la alternativa “a)”, una figura que cumple la condición de tener dos lados con igual medida, pero que no es un triángulo sino un trapecio con base horizontal.

Quienes eligieron esta alternativa estarían evidenciando que no pueden identificar figuras atendiendo a dos atributos de manera simultánea (en este caso ser triángulo y, a la vez, tener dos lados de igual longitud). También es probable que la orientación de la primera figura (trapecio isósceles) les parezca visualmente más familiar, ya que tiene una base horizontal y lados de igual medida, desatendiendo a la condición de ser un triángulo. En este caso, el triángulo isósceles se presenta con una orientación poco familiar para los estudiantes (una base vertical y lados de igual medida más largos que la propia base) contraviniendo el esquema visual que usualmente tienen de este.

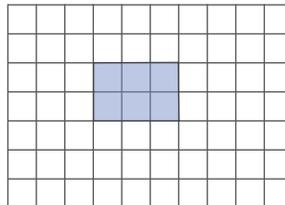
Atienden solo a la orientación usual mediante la que es presentado un triángulo

A su vez, un 7% del total de estudiantes evaluados marcó la alternativa “b)” y un 10,7% optó por la alternativa “c)”. Ambos grupos prestaron atención a la cualidad de que sean triángulos, pero pasaron por alto la condición de que tengan dos lados con igual medida. Cabe señalar que, en estos casos, también estaría

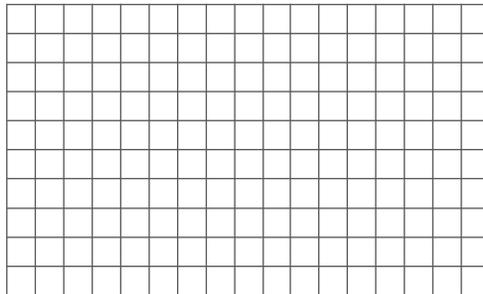
influyendo una noción deficiente del triángulo, que llevaría a los estudiantes a identificar esta figura únicamente en la posición usual: aquella que presenta su base horizontal. Esta podría ser la razón para que descarten la alternativa “d)” como respuesta válida.

Ejemplo de dificultades en la identificación y en la aplicación de propiedades básicas de formas bidimensionales (figuras planas) – Pregunta 13

Observa la figura sombreada:



En la cuadrícula de abajo, dibuja una figura que conserve la misma forma, pero haz que sus lados midan el doble de los lados de la figura sombreada.



Ficha técnica

Capacidad: Razonamiento y demostración

Contenido: Geometría

Contexto: Disciplinar (intra matemático)

Nivel de Logro: Satisfactorio

Medida: 492

Resultados según respuesta de los estudiantes

Correcto (crédito completo):	50,4%
Dibuja un rectángulo, en cualquier posición, cuyos lados midan 4 y 6 cuadraditos, o un valor aproximado a estos. No se exige precisión en los trazos.	
Parcialmente correcto (crédito parcial):	27,8%
Dibuja un rectángulo donde se duplica una de las dimensiones del rectángulo original pero la otra no, o lo hace erróneamente.	
Incorrecto (sin crédito):	19,4%
Respuesta omitida (sin crédito):	2,4%

¿Qué evalúa esta pregunta?

Ampliar o reducir polígonos en función de la proporción de sus lados.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Pueden construir la ampliación de una figura con base en un referente inicial (figura original), atendiendo a la condición de duplicar sus lados. Para resolver esta tarea, los estudiantes podrían representar mentalmente (proceso de visualización) la ampliación del rectángulo original, considerando las longitudes de sus lados y su forma rectangular, al margen de la orientación con la que decida construir dicha ampliación. Luego, podrían plasmarlo en la construcción de un rectángulo cuyos lados midan el doble de los lados correspondientes a la figura original.

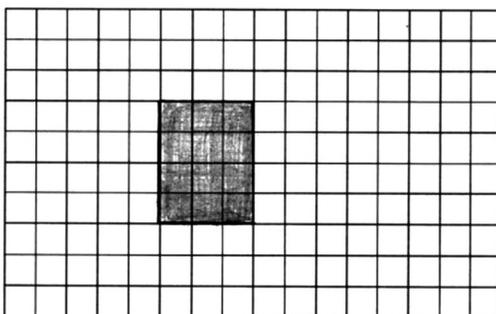
¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?

Interpretan limitadamente la noción de ampliación de una figura

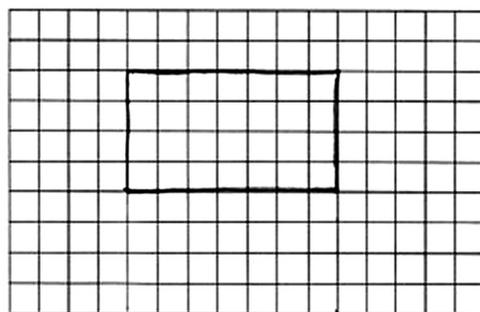
El 27,8% de los estudiantes evaluados identificó la figura como un rectángulo e interpretaron correctamente que la tarea implicaba conservar la misma forma; sin embargo, cometieron errores al construir el rectángulo solicitado, ya que duplicaron solo una de las dimensiones: o el largo o el ancho. También fueron consideradas como respuestas parcialmente correctas aquellas que duplicaron

la longitud de un par de lados paralelos, aunque cometieron error al ampliar (duplicar) el otro par.

Estas dificultades podrían estar causadas por creencias y procedimientos errados sobre la ampliación; por ejemplo, el considerar que duplicar un par de lados paralelos determina automáticamente la duplicación del otro par de lados del rectángulo. También se ha encontrado que algunos estudiantes interpretaron la tarea de ampliación, pero cometieron errores al momento de contar las cuadrículas o estimaron de una manera inadecuada una de las dimensiones ampliadas. Los siguientes ejemplos ilustran lo comentado.



En este caso, el estudiante duplica el ancho del rectángulo original (de 2 a 4 unidades); sin embargo, mantiene la dimensión original de su largo.

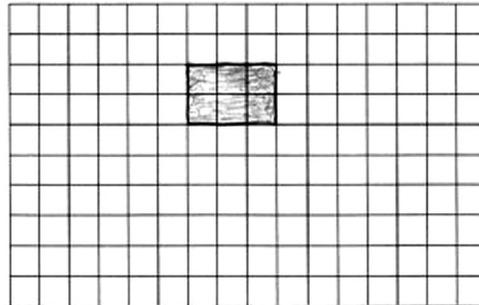
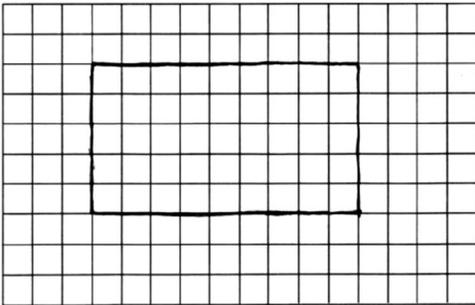


En este caso, el estudiante duplica correctamente la longitud del ancho original, pero se equivoca al duplicar su largo (error de conteo o de estimación).

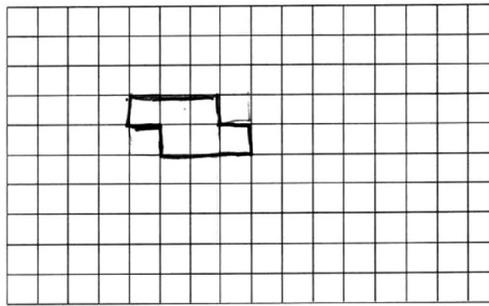
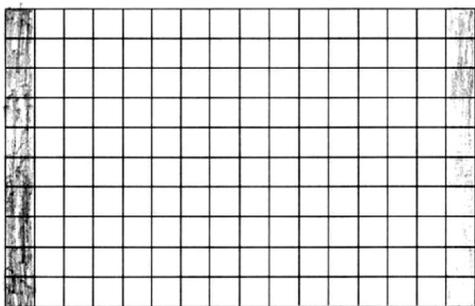
Evidencian desconocimiento de la noción de ampliación de una figura e incomprensión de la tarea propuesta

A su vez, un 19,4% de estudiantes no concretó ni siquiera un avance parcial en la realización de la tarea. Entre las respuestas de quienes componen este grupo se encuentran: la reproducción o copiado de la figura original, posiblemente por malinterpretar el dato del enunciado que propone que el dibujo de la figura “conservar la misma forma”; la interpretación de doble del lado como el resultado de agregar 2 unidades a la longitud original del lado; la ampliación del tamaño del rectángulo, pero ninguno con medida igual al doble de la correspondiente al rectángulo original; y, también, la elaboración de dibujos de figuras no rectangulares.

¿Qué tienen en común esas respuestas erradas? Destacan tanto una deficiente comprensión del enunciado de la pregunta, pues restringen su atención a un dato o condición parcial, así como una falta de manejo de la noción de “doble”, manifestando un desconocimiento de los elementos básicos del proceso de ampliación de una figura en la que interviene el razonamiento proporcional. Los siguientes ejemplos muestran estas dificultades.



Casi la quinta parte de los estudiantes evaluados no lograron duplicar la longitud de los lados correspondientes al rectángulo, en ninguna de las dos dimensiones.



En estos casos se evidencia claramente que algunos estudiantes no comprenden la noción de ampliación de una figura y, probablemente, tampoco las nociones de proporcionalidad.

3.3.3 Sugerencias para el tratamiento de esta dificultad

Uno de los factores que influye en las dificultades que los estudiantes presentan en el aprendizaje de la geometría se relaciona con las oportunidades que las escuelas y los docentes proporcionan. Por ello, es importante que cada docente reflexione sobre si está asignando el tiempo necesario para garantizar que sus estudiantes logren los aprendizajes básicos en geometría y si las actividades desarrolladas en las clases fomentan la exploración de ideas y relaciones geométricas fundamentales orientadas a una mejor comprensión, orientación y movimiento en el espacio.

Afrontar y prevenir las dificultades demanda a los docentes que concentren sus esfuerzos en la exploración de ideas y relaciones geométricas, antes que en la reproducción de definiciones y en el cálculo mediante el uso de fórmulas. Según este propósito, se sugiere favorecer el desarrollo de habilidades para visualizar, diseñar, comunicar, argumentar y modelar.

En cuanto al aprendizaje de formas bidimensionales, a continuación se señalan algunas sugerencias.

Para identificar, clasificar y describir objetos geométricos

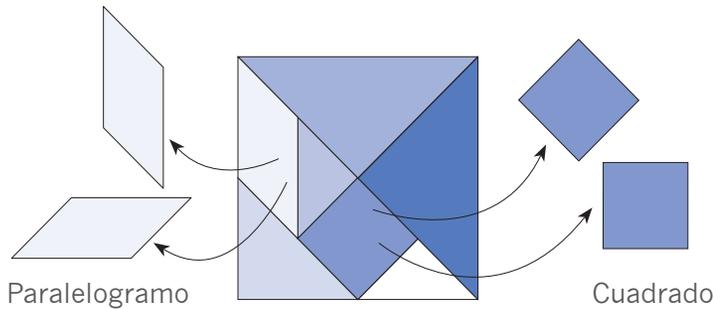
► Proponer actividades de clasificación y de descripción de formas variadas que tengan como punto de partida tanto la observación como la manipulación de objetos concretos. Puede pedir a los estudiantes:

- Nombrar objetos de su entorno que tengan una forma determinada; por ejemplo, la carátula de un libro tiene forma rectangular o la cara de una moneda tiene forma circular.

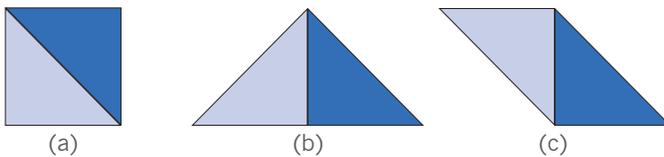
Los estudiantes al centrarse en la forma de un objeto, tratan no solo un caso en particular, sino todos aquellos que pertenecen a una de las clases que son fruto de la clasificación.

- Manipular objetos que les permitan atender no solo a la forma, sino también a su posición. La visualización permite clasificar las piezas según sus características. En estas actividades es importante la descripción que hacen de cada figura, pues les permite clasificarla según la característica

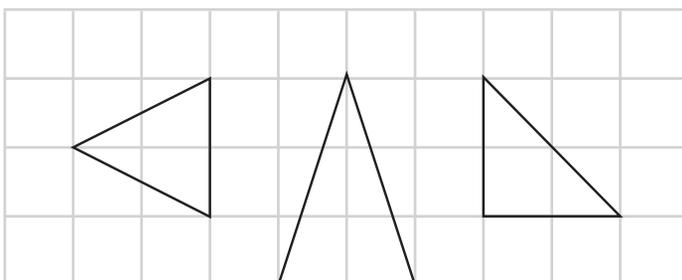
establecida. Así, por ejemplo, comprueban que, si se ignora el grosor, una pieza del “Tangram chino” tiene forma de paralelogramo y que otra pieza tiene forma cuadrada; y que se mantienen con tales formas aunque cambien de posición.



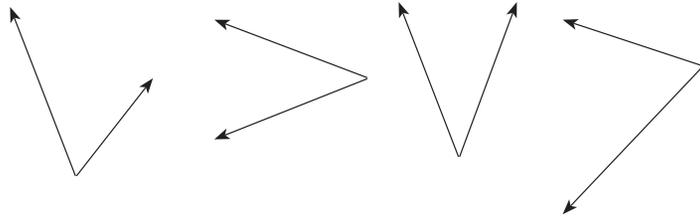
- Usar material concreto para componer y descomponer figuras. Se les puede pedir construir una figura determinada con dos o más piezas del Tangram. Así, por ejemplo, componer con dos piezas triangulares una figura cuadrada (a), un triángulo (b) o un paralelogramo (c). También se puede pedir las "figuras en las que se observa una línea de simetría". En este caso son el cuadrado (a) y el triángulo (b).



- Expresar alguna propiedad y pedir que identifiquen en cuál o en cuáles de las figuras que formaron se cumple esta. Así, las “figuras que tienen lados opuestos paralelos” son el cuadrado (a) y el paralelogramo (c); también sería correcto referirse al rectángulo.
- Graficar, sobre una base de cuadrículas, figuras que atiendan a más de una condición. Así verán que puede haber más de una representación para cada caso. Por ejemplo, dibujar una figura de tres lados que posea dos de sus lados con igual longitud.



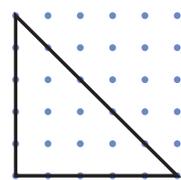
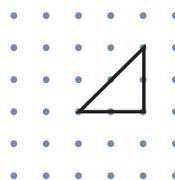
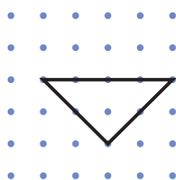
- » La representación es fundamental en el aprendizaje de la geometría, pues facilita la construcción de nociones, conceptos y modelos geométricos; propicie que estas reflejen las características o atributos esenciales del objeto geométrico, evitando inducir a error por un uso recurrente o inapropiado de alguna representación. Por ejemplo, al trabajar con ángulos agudos en distintas posiciones se comunica que la posición no es un atributo específico de esta clase de ángulos.



Para predecir, graficar y describir figuras que resulten de una transformación geométrica

- » Propiciar el uso de modelos concretos y dibujos como herramientas para pensar, de modo que los estudiantes realicen generalizaciones y busquen contraejemplos. Por ejemplo:
 - ¿Será posible dibujar un triángulo con 3 lados iguales? Si así fuese, ¿cómo serían sus ángulos interiores?
 - ¿Será posible dibujar un triángulo que tenga un ángulo mayor que 90° ?
 - ¿Será posible dibujar un triángulo con dos ángulos de 90° ?
- » Proponer actividades que, mediante la inducción, permitan establecer conclusiones sobre qué ocurre con la forma geométrica si se producen variaciones en la posición como el traslado, el giro y la reflexión, o cuando varía el tamaño de la figura. Por ejemplo:

"Construir un triángulo con un ángulo recto y dos lados de igual longitud. ¿Puedes hacer más de un triángulo con estas propiedades? De ser así, ¿cómo se relaciona uno con otros?"



3.4 Dificultades para interpretar y construir gráficos estadísticos

3.4.1 ¿Qué deberían aprender los estudiantes acerca de los gráficos estadísticos?

La Estadística constituye una herramienta cada vez más necesaria para comprender y actuar en el mundo. Las personas y las instituciones deben desarrollar la capacidad de comprender, evaluar y utilizar información presentada, por los diferentes medios de comunicación, mediante tablas y gráficos estadísticos. En este contexto, es conveniente que el estudiante comprenda y utilice, reflexivamente, la información estadística referida a diversos ámbitos de la vida cotidiana.

Desde los primeros años de la escolaridad, los niños aprenden Estadística haciendo una lectura (inicialmente literal) de los datos organizados y presentados en tablas simples y en gráficos sencillos. Durante los grados posteriores, aprenderán a establecer comparaciones entre los datos presentados e interpretarán información explícita presente en tablas y gráficos. Al concluir la primaria, los estudiantes deberían interpretar información no explícita en tablas y en gráficos estadísticos. Asimismo, se espera que durante toda la primaria aprendan gradualmente a recopilar, a organizar y a interpretar datos y tomar decisiones convenientes.

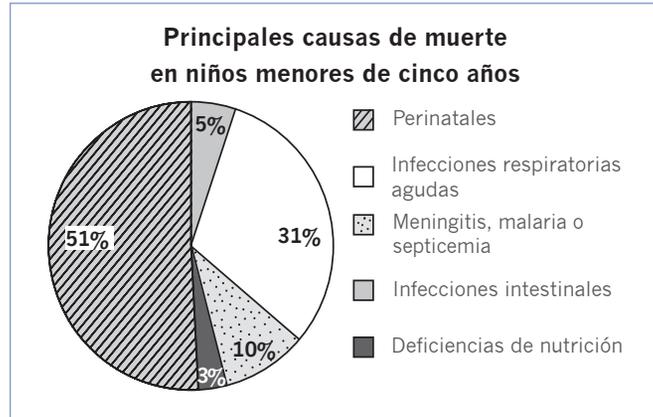
3.4.2 ¿Cómo se expresan las dificultades de los estudiantes?

Se ha identificado que los estudiantes de sexto grado presentan dificultades para obtener información literal a partir de un gráfico, para establecer relaciones y comparaciones entre sus elementos, y para realizar su interpretación; esta dificultad es incluso mayor si la información involucrada es implícita. Asimismo, la Evaluación ha evidenciado que tienen dificultades para sustentar respuestas sobre situaciones problemáticas que involucran el análisis y la interpretación de gráficos y de tablas estadísticas.

A continuación, se analizan algunas preguntas de la prueba, en las que se evidenciaron dificultades en la interpretación y en la construcción de gráficos estadísticos.

Ejemplo de dificultades en la interpretación y en la construcción de gráficos estadísticos – Pregunta 7

En el año 2012, el Ministerio de Salud presentó un informe acerca de las principales causas de muerte en niños menores de cinco años. Observa el siguiente gráfico:



Según el gráfico, ¿cuál es la causa que origina el menor porcentaje de muerte en niños menores de 5 años?

- a) Perinatales.
- b) Infecciones intestinales.
- c) Deficiencias de nutrición.
- d) Infecciones respiratorias agudas.

Ficha técnica

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Estadística y probabilidad

Contexto: Real (extra matemático)

Medida: 403

Resultados según respuesta de los estudiantes

Tipo de respuesta	Alternativa	%
Correcta	c	71,9
Incorrecta	a	12,2
	b	9,5
	d	5,5
No válida*		0,9

* Las respuestas no válidas incluyen la multimarca (más de una alternativa marcada) y las omisiones (“preguntas en blanco”).

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la capacidad de comparar datos presentados en un gráfico circular.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Al resolver esta tarea, los estudiantes tienen que situarse en el contexto para lograr identificar la información propuesta en el gráfico, abarcando desde el título hasta la variable involucrada (causa de muerte) en sus distintas modalidades indicadas en la leyenda.

La tarea puede resolverse mediante la comparación de los datos propuestos en la gráfica y la lectura de la leyenda, acción que se denomina una “lectura entre los datos”⁹ según la taxonomía propuesta por Curcio (como lo refiere Medina, 2011). Así, el procedimiento puede consistir en la comparación de los sectores circulares, buscando identificar el que presente menor superficie, o en la comparación de las cantidades porcentuales correspondientes a cada sector circular.

⁹ De acuerdo con esa taxonomía, “leer entre los datos” implica comparar e interpretar valores de los datos, integrarlos en el gráfico, buscar relaciones entre las cantidades y aplicar procedimientos matemáticos simples a estos datos, comprendiendo tanto la estructura básica del gráfico como las relaciones planteadas en este.

¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?

Distinguen solo características parciales del gráfico y responden automáticamente

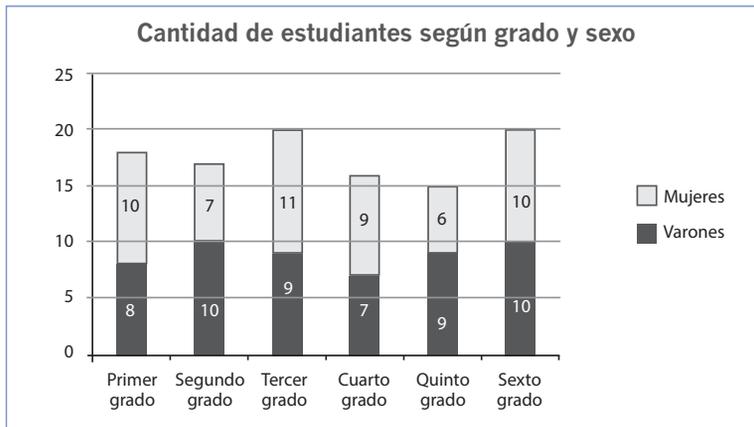
El 12,2% de los estudiantes marcó “a) Perinatales”; esto podría indicar que el estudiante solo considera algunos datos del gráfico, pues ha elegido la causa que presenta el mayor porcentaje de muerte en niños menores de 5 años, en vez de elegir la que tiene menor porcentaje como lo solicita la pregunta. Esta actuación también podría asociarse a cierta práctica escolar recurrente que en los problemas de estadística suele preguntar por el hecho o atributo con mayor frecuencia, originando en este caso que el estudiante marque automáticamente la alternativa “a”).

Muestran un bajo nivel de comprensión

El 9,5% de los estudiantes marcó “b) Infecciones intestinales” y otro 5,5% marcó “d) Infecciones respiratorias agudas”. Es posible que estas respuestas evidencien que los estudiantes muchas veces no comprenden completamente la situación, de modo que no contemplan en su decisión lo que muestran todos los datos, sino que los asocian a los conocimientos previos o creencias acerca de ellos. Al parecer, en este caso estarían interviniendo sus experiencias de vida cotidiana sin alguna elaboración adicional, que es una condición requerida por la pregunta.

Ejemplo de dificultades en la interpretación y en la construcción de gráficos estadísticos – Pregunta 14

El siguiente gráfico muestra la cantidad de estudiantes de una escuela de acuerdo con el grado y el sexo. Observa:



Según el gráfico, en esta escuela ¿hay más estudiantes varones o hay más estudiantes mujeres?

Escribe aquí tu procedimiento.

Respuesta: _____

Ficha técnica

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Estadística y probabilidad

Contexto: Real (extra matemático)

Medida: 505

Resultados según respuesta de los estudiantes

Correcto (crédito completo):	47,6%
Determina que hay igual cantidad de varones y de mujeres, mostrando o no su procedimiento. Se admite hasta un error en la transcripción de datos.	
Parcialmente correcto (crédito parcial):	20,9%
Indica la cantidad correcta de varones y de mujeres, pero no responde a la pregunta; o, cuando empieza un procedimiento adecuado, comete errores de cálculo y expresa una conclusión basada en este.	
Incorrecto (sin crédito):	26,2%
Respuesta omitida (sin crédito):	5,3%

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa la interpretación de gráficos estadísticos para resolver problemas aditivos de comparación, a partir de una situación de contexto escolar donde la información se presenta en un gráfico de barras apiladas.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Podría interpretar este tipo de gráfico, llamado gráfico de barras apiladas, que presenta la información tanto en los ejes como en las barras. En este caso, las modalidades de la variable (los grados de primaria) se encuentran en el eje horizontal y la cantidad de estudiantes en el eje vertical. Además, hay una exigencia adicional: en las barras, la cantidad de estudiantes se organiza por sexos. A partir de esta información, se le solicita al estudiante averiguar si hay más varones o mujeres en la escuela, sin especificar cuánta es la diferencia.

Esta tarea implica identificar los datos, a partir de la lectura, y la comparación de la cantidad de estudiantes que hay en cada grado. En el proceso de comparación, los estudiantes podrían planear y ejecutar estrategias de naturaleza heurística como identificar que algunas de las cantidades de varones o de mujeres son las mismas en algunos grados o que sumas parciales de cantidades de varones coinciden con la de mujeres; de modo que al final se hará evidente la igualdad de cantidades totales de mujeres y de

varones. Alternativamente, podrían seguir estrategias operativas de naturaleza aditiva como sumar las cantidades parciales de varones y de mujeres, respectivamente, para luego comparar los resultados. Se concluye que hay igual cantidad de varones que de mujeres.

¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?

Establecen la estrategia, pero cometen errores de procedimiento o no efectúan la comparación

El 20,9% de los estudiantes solo resolvió una parte del problema. En algunos casos, los estudiantes lograron obtener las respectivas cantidades totales de varones y de mujeres en la escuela; pero no llegaron a compararlos. En otros, identificaron que debían comparar la cantidad de varones con la de mujeres, pero cometieron errores de cálculo durante su procedimiento.

Según el gráfico, en esta escuela ¿hay más estudiantes varones o hay más estudiantes mujeres?

Varones Escribe aquí tu procedimiento.

$$\begin{array}{r} 8 + 18 + 27 + 34 + 43 + \\ \frac{10}{18} \quad \frac{9}{27} \quad \frac{3}{34} \quad \frac{9}{43} \quad \frac{10}{53} \end{array}$$

Mujeres

$$\begin{array}{r} 10 + 17 + 28 + 37 + 43 + \\ \frac{7}{17} \quad \frac{11}{28} \quad \frac{9}{37} \quad \frac{6}{43} \quad \frac{10}{53} \end{array}$$

Respuesta: Varones 53 Mujeres 53

Interpretan equivocadamente lo solicitado o el gráfico de barras apiladas

El 26,2% de los estudiantes expresa como respuesta una expresión incoherente con lo solicitado. Este grupo incluye, por ejemplo, a los estudiantes que no comprendieron la pregunta y la asociaron a una situación aditiva, pues sumaron la cantidad de varones y de mujeres; o el caso de los estudiantes que respondieron que había

más “mujeres”, sin justificar su respuesta posiblemente porque se guiaron únicamente por su percepción; esto podría ocurrir porque estos estudiantes no tuvieron oportunidades de interpretación de este tipo de gráfico de barras, por estar familiarizados únicamente con gráficos de barras simples o solo con preguntas que requieren averiguar una cantidad específica de un gráfico.

Según el gráfico, en esta escuela ¿hay más estudiantes varones o hay más estudiantes mujeres?

Escribe aquí tu procedimiento.

$$\begin{array}{r} 53+ \\ 53 \\ \hline 106 \end{array}$$

Respuesta: En total hay 106 estudiantes.

3.4.3 Sugerencias para el tratamiento de esta dificultad

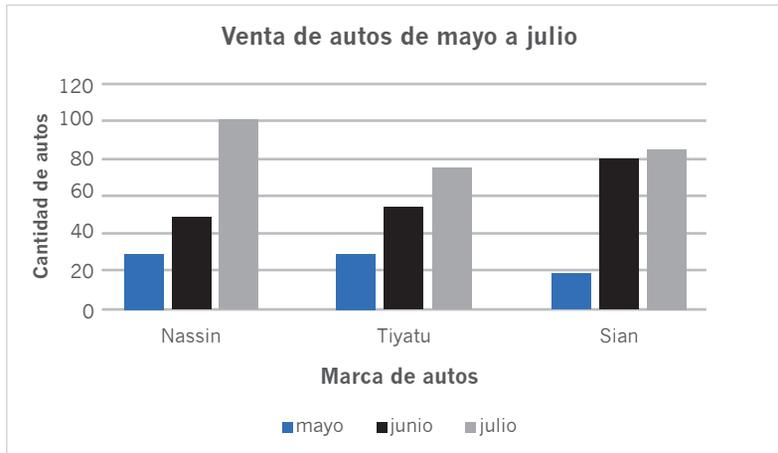
Las siguientes recomendaciones se centran en la interpretación de gráficos estadísticos, con la finalidad de que los estudiantes puedan leer la información directa o indirecta y que, a partir de esta, establezcan comparaciones y deducciones.

Un punto de partida es identificar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes con quienes se trabaja. Aquí podemos considerar la mencionada taxonomía de Curcio, quien propone tres niveles de comprensión:

- Leer los datos (lectura literal). Implica leer y describir los elementos que componen un gráfico; no se realiza ninguna interpretación de datos.
- Leer entre datos (comparación de datos). Requiere la interpretación de los datos, la habilidad de comparar las cantidades y el uso de otros conceptos matemáticos.

- c. Leer más allá de los datos (extensión de la información).
Se relaciona con la capacidad de realizar predicciones e inferencias a partir de los datos.

Para una mejor comprensión de esta clasificación, se plantea el siguiente ejemplo:



Leer los datos	<ul style="list-style-type: none"> • ¿De qué trata el gráfico? • ¿Cuántas marcas de autos fueron encuestadas? • ¿Cuántos autos vendió Nassin en el mes de mayo?
Leer entre datos	<ul style="list-style-type: none"> • En el mes de julio, ¿qué marca de autos vendió menos? • ¿Qué marca de autos ha vendido más de mayo a julio? • ¿En qué mes hubo menos venta de autos?
Leer más allá de los datos	<ul style="list-style-type: none"> • Si tuvieras que escoger un mes para lanzar una promoción de venta de autos, ¿cuál escogerías? ¿Por qué? • ¿Qué habría causado que en el mes de julio haya mayor venta de autos? • Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: “La empresa Nassin es la que mayores ventas ha tenido de mayo a junio”. Justifica tu respuesta.

Identificado los niveles de comprensión de sus estudiantes, el docente debe reconocer que existen factores que influyen en sus logros, como los conocimientos previos sobre el tema presentado, el conocimiento de las convenciones en la construcción de gráficos y el conocimiento de los conceptos matemáticos involucrados. Considerando estos factores, se plantean las siguientes recomendaciones:

- » Proponer principalmente gráficos referidos a situaciones próximas a la realidad del estudiante. Por ejemplo, temas relacionados con la familia, con la escuela y con la comunidad. Del mismo modo, motivar a los estudiantes para dar respuesta a las preguntas y, de ser posible, que ellos mismos realicen otras preguntas que sirvan para obtener datos.
- » Proponer actividades que permitan valorar la importancia de los elementos de un gráfico, su lectura literal y su comprensión inicial. Por ejemplo, presentar actividades en las que los estudiantes completen la información de un gráfico de barras simples, apiladas o dobles. Esa información podría ser:
 - El título. Para ello, los estudiantes tendrán que observar las categorías y los valores que se emplean en cada uno de los ejes y luego, en grupo, elegir un título que resuma la información completa y que no genere confusión.
 - El valor de una o más barras en un mismo gráfico donde se especifica la escala, que posteriormente se puede variar. Resalte el buen uso de la escala.
 - Los valores que quedarán marcados en la escala, contando como dato explícito la información de una o de más barras.
 - La leyenda, en un caso de gráfico de barras dobles o apiladas.
 - Los ejes y la información correspondiente a cada uno de ellos.

En todos los casos no se espera solo una respuesta correcta, sino sucesivos acercamientos que, con la participación de todos, permitan elecciones pertinentes de una o de más alternativas, claramente justificadas. Una actividad similar se puede realizar con otras variedades de gráficos estadísticos.

- » Es importante que los estudiantes distingan una buena o mala presentación de la información, pero sobre todo que desarrollen

una actitud crítica frente a esta. Conviene motivarlos para que no se acostumbren a asumir pasivamente la información que reciben, sino más bien que indaguen acerca de la procedencia y de la veracidad de los datos presentados.

- » Para propiciar la familiarización con la variedad de gráficos estadísticos y establecer una conexión con los temas que le interesan, se puede promover que cada estudiante elabore un portafolio de gráficos estadísticos. Este recurso puede construirse del siguiente modo:
 - Solicitar a los estudiantes que, usando Internet, revistas o periódicos, recolecten información de su interés expresada mediante gráficos estadísticos. En el caso de que no tengan muchas oportunidades de obtenerlos, el docente podría facilitarles algunos.
 - Invitar a que organicen el material según el gráfico empleado.
 - Incentivarlos para que busquen gráficos novedosos y distintos.
 - Solicitar la interpretación o significado de un dato determinado, la comparación de datos o grupos de datos, la realización de algunas deducciones sencillas o la formulación de preguntas.

La familiarización con diferentes tipos de gráficos estadísticos busca prioritariamente que los estudiantes logren identificar e interpretar información, más que comprender cómo se construyen o elaboran.

- » Para propiciar la interpretación de la información, se pueden planificar trabajos grupales, pidiendo que los estudiantes elijan, del portafolio elaborado, tres gráficos que sean originales y complejos. Luego, se les solicita responder preguntas orientadas a establecer la diferencia o la acumulación de frecuencias. Posteriormente, se les puede plantear una respuesta y solicitar que ellos generen las preguntas. Finalmente, se pueden plantear preguntas en las que el niño tenga que relacionar la información del gráfico con sus saberes previos. En este último punto, es importante recordar que al interpretar no hay una única respuesta correcta, pues la variedad de soluciones dependerá del contexto y de la experiencia del estudiante.

3.5 Dificultades para formular problemas matemáticos

3.5.1 ¿Qué deberían aprender los estudiantes acerca de formular problemas?

A lo largo de su escolaridad, los estudiantes resuelven problemas preparados con fines de enseñanza, tanto por los docentes como por quienes elaboran los libros de texto; aquellos les sirven para que aprendan a identificar y a interpretar la información que presentan y a solucionarlos a partir de esta. A su vez, en la vida diaria extraescolar observan que si se presenta determinado problema ya delimitado, se recurre a la persona o a la institución que la comunidad considera como apta para resolverlo.

Limitadas a estas experiencias, la formulación de problemas pareciera ser una labor especializada de educadores, de inventores o de expertos. Sin embargo, la historia de las ciencias y el desarrollo tecnológico muestran que solo una parte de las soluciones propuestas en el mundo surgen a partir de la resolución de problemas ya presentados o planteados por otros. De ahí que, desde un punto de vista integrador, se considere que formular un problema es una actividad estrechamente ligada con la capacidad de resolver problemas, cuyo desarrollo es útil dentro y fuera de la escuela.

Por otra parte, ¿habrá situaciones que sin ser consideradas como problemáticas puedan ser tratadas como tales con la intención de modificarlas? La respuesta es afirmativa. Muchas de las ideas-soluciones relacionadas con el avance del conocimiento y con el bienestar del ser humano surgen para conocer o mejorar situaciones que inicialmente no fueron problemas. Por ejemplo, las diversas formas de organizar un lugar y de optimizarlo con un propósito o el desarmar un artefacto con la finalidad de conocer su funcionamiento.

Aprender a formular problemas, como parte indelible de su resolución, es una actividad consciente que se pone en práctica en el aula cuando el niño busca los medios para conocer o mejorar una experiencia, según una meta establecida por él. Se expresa en experiencias tempranas y sencillas en las que el niño, en un ambiente de seguridad afectiva, se atreve a proponer una meta, la que procurará alcanzar a partir de un punto de partida. Así

ocurre cuando un niño pequeño crea un camino con piezas que él tiene que atravesar, sin que el padre o el docente se lo hayan sugerido; en este caso, aquel expresa su iniciativa de explorar y, para ello, proyecta lo que hará con las piezas que conoce: formula (en forma oral y con su lenguaje incipiente) que busca hacer un camino retador, lo diseña y lo prueba.

De esta manera, formular un problema e involucrarse en su solución permite que el estudiante amplíe la percepción de su entorno, construya o consolide conocimientos básicos y exprese sus ideas cada vez más diversas y creativas; además, contribuye a que actúe de forma propositiva, ejerza su autonomía y desarrolle sus motivaciones.

Todos estos aspectos pueden atenderse cuando el estudiante participa activamente en el reconocimiento de situaciones que le interesa conocer o modificar con ayuda de habilidades y de conocimientos matemáticos.

Así, desde un punto de vista didáctico, en la actividad de formular problemas matemáticos se pueden identificar las siguientes tareas:

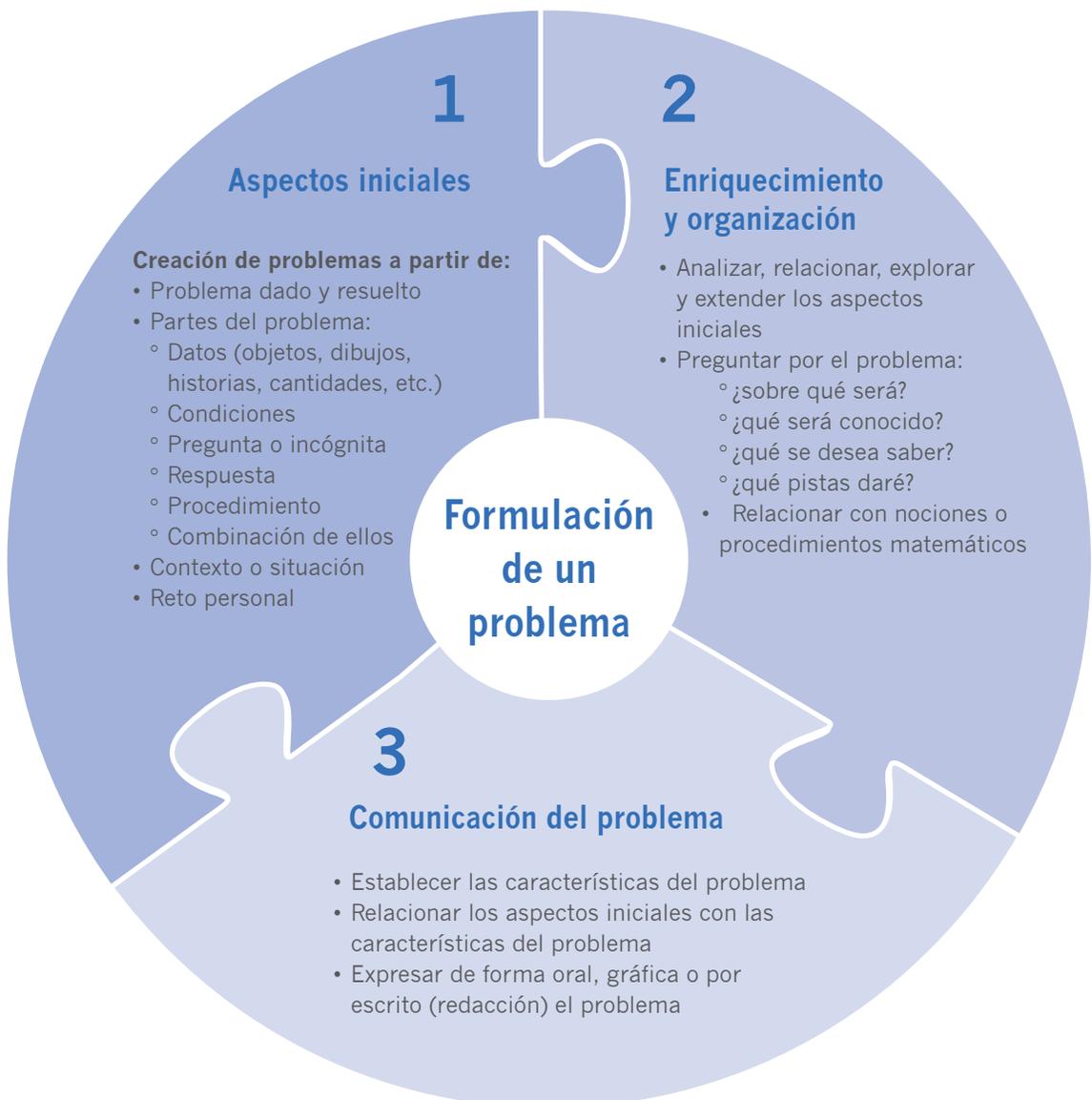
- › Replantear un problema dado durante su proceso de solución.
- › Identificar situaciones que pueden generar problemas.
- › Plantear preguntas ante una situación, de modo que permitan explorarla y modificarla.
- › Crear (comunicar) un nuevo problema en búsqueda de una solución.

Según lo expuesto, en la Evaluación se indagó por la creación o formulación de problemas que los estudiantes de sexto grado construyen a partir de ciertas condiciones o contextos dados, de modo que establezcan relaciones lógicas entre estos y el resultado que tendría el problema. Si los estudiantes formulan un problema de manera óptima, evidencian que son capaces de comunicar y representar ideas matemáticas, de aplicar las nociones aprendidas y, posiblemente, de establecer procedimientos para su resolución.

Considerando este aspecto, se propusieron tareas centradas en el planteamiento de preguntas ante una situación y en la creación de un nuevo problema a partir de ciertas caracterizaciones:

- › Formular problemas solo a partir de un soporte gráfico, donde sus elementos están involucrados en la propuesta a crear.
- › Formular problemas a partir de datos previos, que además incluyen un soporte gráfico y un conjunto de condiciones que caracterizarán la situación a crear.
- › Formular problemas a partir de respuestas preconcebidas, buscando que la situación creada por el estudiante se ajuste a la respuesta indicada en la situación inicial; estas también cuentan con un soporte gráfico.

El siguiente esquema se aproxima al proceso seguido en la formulación de un problema:



3.5.2 ¿Cómo se expresan las dificultades de los estudiantes?

A partir de los resultados encontrados, se evidencia que los estudiantes tienen serias dificultades para plantear preguntas y crear problemas según los datos o condiciones brindadas.

En algunos casos no comprenden que les piden, en otros casos no saben qué información considerar o no logran organizar adecuadamente sus ideas para plantear un problema, probablemente porque no les es posible encontrar sentido o dar significado a la información que se le presenta o porque no están familiarizados con la formulación de preguntas a partir de una información, rol que generalmente es asumido por el docente y no por el estudiante.

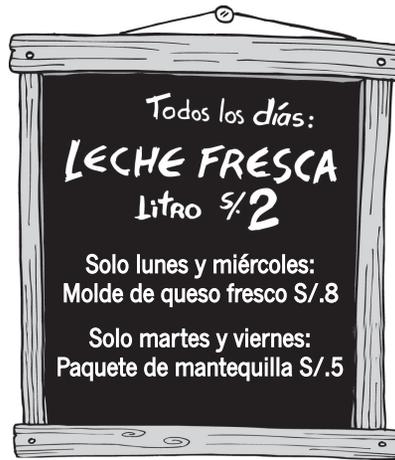
También se observan limitaciones para generar situaciones problemáticas diferentes a las aditivas, como serían las multiplicativas o de proporcionalidad directa y sus respectivas aplicaciones. Esto posiblemente se produciría porque la adición es uno de los campos temáticos más trabajados y sencillos, lo que genera en el estudiante la confianza suficiente para emplearla. Una buena parte de los estudiantes que resolvieron adecuadamente esta pregunta emplearon una estructura aditiva sencilla y muy cercana a lo que se observa en los libros de texto o en las clases. Si bien cumplieron con lo solicitado, se observa poca creatividad en lo realizado. Asimismo, presentan dificultades para establecer relaciones entre las variables involucradas en el soporte gráfico y los enunciados.

Los indicios de elaboración de situaciones creativas que tengan un sentido y una coherencia adecuada al contexto propuesto presentan deficiencias de redacción que influyen sobre la intencionalidad de su creación. Se ha evidenciado que muchas de las preguntas planteadas por los estudiantes solo hacen referencia a información explícita y literal, que se basan en los datos proporcionados.

Ejemplo de dificultades en la formulación de problemas matemáticos – Pregunta 15

A partir de la siguiente situación debes escribir **un problema**. Toma en cuenta que para resolver este problema debes usar lo que has aprendido en **Matemática**.

En la tienda de Don Pepe se puede ver este cartel:



Escribe un problema usando los datos del cartel y considerando que hoy día es miércoles.

Ficha técnica

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Número y operaciones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de logro: Por encima de Satisfactorio

Medida: 620

Resultados según respuesta de los estudiantes

Correcto (crédito completo):	20,5%
Formula un problema que involucra los datos del cartel y/o el dato “hoy es miércoles”. La pregunta planteada es coherente con el enunciado.	
Parcialmente correcto (crédito parcial):	10,5%
Solo formula una pregunta referida a la información presentada en el cartel. En otros casos, escribe un enunciado que corresponde a los datos del cartel, pero no formula la pregunta o esta no tiene relación con el enunciado.	
Incorrecto (sin crédito):	60,4%
Respuesta omitida (sin crédito):	8,4%

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa formular un problema que involucra nociones aditivas y/o multiplicativas con números naturales, fracciones o decimales, a partir de información de contexto real presentada con un formato mixto que combina oraciones con un cartel.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

El estudiante inicialmente puede interpretar lo que le corresponde hacer en la tarea: “crear un problema que se resuelva con lo aprendido en matemática, usar datos del cartel y considerar que es día miércoles”. Para ello, el estudiante moviliza la idea que tiene sobre qué es un problema; esta puede ser diversa y, a veces, estar asociada a la idea clásica de lo que este es, con frecuencia vinculado a un texto cuya pregunta no necesariamente parte de una imagen, de un gráfico, etc.

Un segundo aspecto es la relación entre el estudiante y la situación. En esa dinámica, el niño recuerda y elige, si le es posible, las nociones o los conocimientos matemáticos con los que se siente seguro o cómodo al relacionarlos con la información que le brindan y que tendrá que poner en práctica en su resolución; esas nociones probablemente serán las aditivas, multiplicativas, de relación de orden o la integración de estas.

Finalmente, el estudiante organiza la información, la redacta y la revisa de acuerdo con las condiciones planteadas; así, identifica los datos (explícitos y no explícitos), establece el orden de presentación y pone énfasis en la pregunta (si la considera como parte de la formulación del problema).

¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?

Interpretan parcialmente la tarea

El 10,5% de los estudiantes resolvieron parcialmente la tarea, probablemente porque su nivel de comprensión de la situación planteada en el cartel y la tarea los orientó solo a atender una parte de lo solicitado. Así, están comprendidos en este grupo los estudiantes que:

- › Formularon una pregunta referida a un dato explícito en el cartel, sin considerar la condición de que “hoy” es miércoles.
- › Formularon un problema con un enunciado que corresponde a los datos del cartel y que no contiene una meta por alcanzar o una pregunta, o consignan una pregunta que no tiene relación con el enunciado.

Escribe un problema usando los datos del cartel y considerando que hoy día es miércoles.

Leche fresca cuesta $\$1/2$ ¿en 4 cuanto costará? Respuesta: costará $\$1/8$ leche fresca

Interpretan erróneamente la tarea o plantean situaciones que no guardan relación con las condiciones propuestas

El 60,5% de los estudiantes no realizó la tarea solicitada; ellos desarrollaron un procedimiento de resolución de alguna situación relacionada con el soporte gráfico (el cartel), pero no plantearon un problema o, en otros casos, solo describen la situación propuesta

en el cartel. Dentro de este grupo también se incluyen aquellos estudiantes que plantean situaciones que no tienen coherencia o no guardan relación con las condiciones del problema y con los datos propuestos en el cartel; este grupo evidencia serias dificultades para comprender la situación, para interpretar las condiciones y para recrearlas en la generación de un problema.

Ejemplo de dificultades en la formulación de problemas matemáticos – Pregunta 4



A partir de la siguiente situación debes escribir un **problema que tiene una respuesta dada**. Toma en cuenta que para resolver este problema debes usar lo que has aprendido en Matemática.

Crea un problema usando los datos de la imagen y cuya respuesta sea “6 manzanas”.



Respuesta: 6 manzanas

Ficha técnica

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Número y operaciones

Contexto: Real (extra matemático)

Nivel de logro: Satisfactorio

Medida: 512

Resultados según respuesta de los estudiantes

Correcto (crédito completo):	45,4%
Formula un problema que utiliza, parcial o totalmente, la información del gráfico y cuya respuesta es “6 manzanas”.	
Parcialmente correcto (crédito parcial):	30,5%
Formula un enunciado con la información del gráfico; sin embargo, no formula su pregunta o, cuando lo hace, su respuesta no es “6 manzanas”. En otros casos, formula un problema completo utilizando solo la presencia de manzanas, pero no los datos de la imagen, con respuesta “6 manzanas”.	
Incorrecto (sin crédito):	20,2%
Respuesta omitida (sin crédito):	3,9%

¿Qué evalúa esta pregunta?

Evalúa formular un problema que involucra nociones aditivas y/o multiplicativas con números naturales, fracciones o decimales, a partir de información de contexto real presentada en un formato mixto que combina oraciones con imagen.

¿Qué podría hacer un estudiante para resolver esta pregunta?

Los estudiantes tendrán que crear un problema que considere tanto la ilustración de las dos manzanas y la bolsa mostrada como la respuesta esperada: “6 manzanas”; en esta tarea, deberán poner en práctica sus nociones matemáticas y formular el problema de modo que la pregunta que planteen sea explícita y diferente del enunciado. Además, se espera que los estudiantes verifiquen si su formulación integra condiciones que sean coherentes con la respuesta esperada.

¿Qué dificultades han mostrado los estudiantes?

Interpretan o atienden parcialmente a las condiciones propuestas en la tarea

El 30,5% de los estudiantes atienden de manera parcial a los datos y condiciones proporcionadas. Muchas veces consideran

un contexto que está relacionado con “manzanas”, pero dejan de lado la respuesta esperada; otras, no interpretan las condiciones planteadas y solo se preocupan por obtener operativamente la respuesta “6 manzanas”. Se evidencia dificultad para articular las condiciones y la respuesta en forma coherente. Utilizan prioritariamente nociones aditivas.

Jorge tiene 15 manzanas. Marta tiene 9 manzanas menos en su bolsa ¿cuántas manzanas tiene Marta en su bolsa?

Respuesta: 6 manzanas

Describen situaciones que atienden a la respuesta dada, pero no formulan un problema

El 20,2% de los estudiantes evidencian dificultades para formular un problema que atienda a las condiciones propuestas: usar los datos de la imagen y obtener como respuesta “6 manzanas”. Los estudiantes proponen, generalmente, situaciones ligadas a nociones aditivas, buscando vincular su formulación con la respuesta mencionada; sin embargo, más que elaborar la formulación de un problema, describen situaciones.

Adicionalmente, algunos estudiantes no consideran la condición de usar los datos propuestos en la imagen, mientras que otros, al parecer, no interpretan la tarea y describen situaciones que no atienden a la respuesta ni a los datos mencionados.

Si hay 4 manzanas más 2 manzanas
sumo así en total o 6 manzanas

Respuesta: 6 manzanas

en una canasta hay 2 manzanas
cuántas manzanas hay en
total

Respuesta: 6 manzanas

3.5.3 Sugerencias para el tratamiento de esta dificultad

La formulación de problemas puede abordarse como un aspecto del proceso enseñanza-aprendizaje relacionado con la resolución de problemas; esta permite reconocer las nociones construidas y empleadas por los estudiantes, así como su habilidad para problematizar una situación y mejorarla.

En principio, se recomienda reflexionar sobre las ideas o creencias que cada docente tiene acerca de qué es un problema. Algunas preguntas orientadoras pueden ser: ¿Qué tipo de presentación posee?, ¿qué elementos tiene?, ¿su respuesta es única?, ¿en su solución se emplean solo números?, ¿en su resolución se emplean solo operaciones o es posible resolverlo con relaciones?, ¿su resolución es posible efectuarla recurriendo a una forma simbólica o gráfica?, ¿su respuesta coincide con el resultado de una operación?, ¿cómo es posible reconocerlo? Además, es conveniente fomentar el diálogo entre docentes sobre las reflexiones provocadas por preguntas de este tipo; esto permite lograr consensos que pueden implementar en la variedad de problemas que presentan, mejorando el desarrollo de las capacidades de formulación y de resolución de problemas por parte de los estudiantes.

En relación con los estudiantes, se recomienda estar atentos a las oportunidades que se les brinda para que formulen problemas. Las siguientes preguntas permiten una aproximación a la manera en la que cada docente atiende este aspecto:

- » ¿Cómo los anima a expresar sus hallazgos y representarlos?

- » ¿Cómo los orienta en el uso de variadas estrategias de comunicación para describir lo que encuentran y las propiedades que tienen?
- » ¿Qué oportunidades les brinda para explorar, formar hipótesis, tomar riesgos y participar en el juego simbólico o dramático, con confianza?
- » ¿Qué oportunidades les ofrece para explorar su entorno local y registrar lo que ven utilizando medios visuales?
- » ¿Qué oportunidades les proporciona para investigar varias maneras de representar datos?
- » ¿Qué oportunidades les otorga para investigar ideas matemáticas que forman parte del ambiente local, natural o construido?
- » ¿Cómo los anima en el uso de la Matemática para ser consumidores críticos de productos comunes?
- » ¿Cómo los ayuda a establecer conexiones entre diversos conceptos y representaciones matemáticas?
- » ¿Qué oportunidades les presenta para proponer un argumento matemático y justificarlo?
- » ¿Cómo los orienta a desarrollar la confianza en su capacidad de explorar, de formar hipótesis y de tomar decisiones apropiadas en cuanto a la Matemática?

Por otra parte, para mejorar la estructuración del proceso de aprendizaje en la formulación de problemas por parte de los estudiantes, es indispensable que el docente genere un ambiente de oportunidades donde ellos expresen sus conocimientos y sus creencias sobre qué es un problema; actuando sobre estas, progresivamente se puede enriquecer o ampliar esta noción; tal proceso involucra la identificación de los elementos que lo componen: datos, condiciones y pregunta o incógnita. Adicionalmente, se sugiere que el docente considere lo siguiente:

- » Para enriquecer la noción de problema en matemática, se sugiere iniciar el proceso de formulación asignando tareas simples; por ejemplo, reconocer y luego verbalizar globalmente qué es un problema. Posteriormente, se debe generar tareas adecuadas para que gradualmente los estudiantes conozcan su estructura diferenciando sus elementos y, de manera implícita,

establezcan relaciones entre las condiciones y los datos propuestos en el problema.

- » Con el fin de generar un clima de confianza en la interacción entre pares, de que puedan expresar sus ideas y atreverse a probar nuevos caminos, se aconseja fomentar la organización de equipos de trabajo basados en un interés común, en la empatía o afinidad, y que combinen habilidades matemáticas diversas.
- » Para fomentar la curiosidad y facilitar la generación de preguntas, se sugiere plantear situaciones cercanas a la realidad de los estudiantes, centrados en su interés y que provoquen su curiosidad; esto incrementará su comprensión, así como su motivación por la generación de problemas. Incluso, si es posible, se les puede involucrar en algún proyecto que se llevará a cabo en la escuela o fuera de ella (como la construcción de un parque, la elaboración de un polo, de un video, etc.). Una forma de concretar esta tarea es propiciar actividades en las que empleen recortes periodísticos, cómics, revistas y demás recursos, para que así creen, adapten o recreen situaciones que respondan a sus curiosidades e intereses.
- » Con el propósito de generar preguntas asociadas a contenidos y a habilidades matemáticas, se puede iniciar la formulación de preguntas a partir de un problema completo; a este se le puede, por ejemplo, variar la pregunta, pero se debe responder con la información brindada. De esta forma, el estudiante se dará cuenta de que la selección de datos depende de la tarea solicitada o de la pregunta realizada o, incluso, que para un mismo juego de datos, el proceso de resolución varía en función de las preguntas.
- » Para mejorar la capacidad de elaboración de preguntas ante una situación nueva, se puede identificar situaciones susceptibles de mayor exploración y que posibiliten su problematización. En este aspecto, se puede orientar a los estudiantes a la formulación de preguntas que cumplan con los siguientes requisitos:
 - Que puedan ser respondidas con una respuesta larga y no con una afirmación o una negación.
 - Que se orienten al establecimiento de descripciones o de comparaciones basadas en aspectos matemáticos.

- Que permitan hipotetizar (“qué ocurre si...”) o imaginar situaciones nuevas con sus posibles caminos de solución basados en las habilidades y en los conocimientos matemáticos.

Considere que la valoración del esfuerzo de los estudiantes al momento de formular un problema implica, especialmente en los inicios de la formulación, no ser exigentes con la redacción ni con la ortografía, como tampoco con la creatividad y el ingenio desplegados en sus propuestas.

Con la finalidad de incrementar la complejidad de la formulación, se sugiere realizarlo en forma gradual. Así, las primeras experiencias de formulación podrían partir de situaciones que no necesariamente dependan de datos numéricos, sino que requieran establecer relaciones cualitativas, de ordenamiento o de razonamiento lógico. Luego, se podrán generar situaciones problemáticas a partir de enunciados incompletos, de preguntas o respuestas anticipadas, de soportes gráficos, etc., para finalmente crear problemas basados en la transformación de datos, en la presencia de datos adicionales o en condiciones de problemas ya propuestos.

A continuación, se presentan algunas variantes de situaciones para que, a partir de ellas, se formulen problemas.

a. Situaciones que no cuentan con datos numéricos

- “Las sillas que construyó papá no fueron suficientes para la fiesta; pero un vecino nos prestó las suyas y todos los invitados lograron sentarse”.
- “María caminaba hacia su casa y en el camino encontró a una amiga. María llegó triste a casa porque perdió algunas figuritas”.
- “Teresa tiene algunos billetes en su cartera. Julia tiene monedas en la suya. Una de las dos pudo comprar más figuritas que la otra; ¿quién podría ser?”.

b. Situaciones a partir de enunciados abiertos

Crea un problema a partir de la figura mostrada



c. Situaciones a partir de un resultado dado

A partir de la información mostrada, crea un problema usando lo aprendido en matemática.

La profesora Jimena entrega libros a sus estudiantes. Observa.



Respuesta: 5 libros.

La formulación de problemas por los estudiantes es una actividad muy importante para el desarrollo del pensamiento lógico, crítico, reflexivo, creador y flexible, así como para el desarrollo de habilidades matemáticas y la aplicación de los conocimientos matemáticos adquiridos; siendo necesario por ello que los docentes, en los distintos grados de la educación primaria, le dediquen un espacio para su trabajo paulatino.

4.

Desafíos

4. Desafíos

En el marco de los grandes desafíos del sistema escolar, los docentes pueden contribuir en formas diversas y en grado importante al desarrollo de la competencia matemática. Las evaluaciones estandarizadas de sistema, como en este caso la realizada con estudiantes del sexto grado, cumplen un rol referencial al reportar los logros de aprendizaje exigibles a nivel nacional, proporcionando valiosa información útil para ajustar los procesos de enseñanza-aprendizaje en cada institución educativa y en cada aula. En este escenario, el desarrollo de la competencia matemática puede favorecerse si los docentes asimilan críticamente la información y las sugerencias que se desprenden de estas evaluaciones.

La actuación docente es crucial. A partir de lo tratado en este estudio, se proponen tres desafíos fundamentales: potenciar las habilidades cognitivas de los estudiantes; dar un tratamiento constructivo a los errores de los estudiantes; e involucrarse en procesos de formación continua que mejoren la labor profesional en el área de matemática; los cuales pueden tener un impacto notable en la mejora de los logros de aprendizaje de los estudiantes, si son asumidos por los docentes. Estos, por su parte, pueden enriquecer su desarrollo profesional, interactuando colaborativamente con un manejo productivo de tiempo, de espacios y de otros recursos. Se espera que las ideas que se exponen a continuación propicien reflexiones por parte de cada equipo docente.

4.1 Potenciar las habilidades cognitivas de los estudiantes

Los resultados nacionales de la evaluación realizada evidencian que la gran mayoría de estudiantes de sexto grado presentan déficits en cuanto a las habilidades y destrezas cognitivas involucradas en el aprendizaje de la Matemática. En esta situación, uno de los factores que intervienen son las denominadas oportunidades de aprendizaje (ODA).

Según Zambrano (2004), las oportunidades de aprendizaje se refieren a la forma en que los conocimientos y las condiciones para el desarrollo de habilidades y actitudes se ofrecen a los estudiantes

de manera que estos puedan aprovecharlos. Tales oportunidades dependen tanto de los recursos puestos a disposición de la institución educativa como, principalmente, de la forma en la que estos recursos son utilizados por los docentes.

La demanda cognitiva es un componente de las oportunidades de aprendizaje. Indica el nivel de complejidad con que se aborda un contenido y que exige al estudiante determinado desempeño cognitivo. Se asumen dos niveles:

- Baja demanda cognitiva, orientada a la memorización y a la resolución de ejercicios abstractos, intra matemáticos, en los que los pasos para su resolución son conocidos de antemano y se realizan siempre de forma similar. Por ejemplo:

Halla el resultado de las siguientes expresiones:

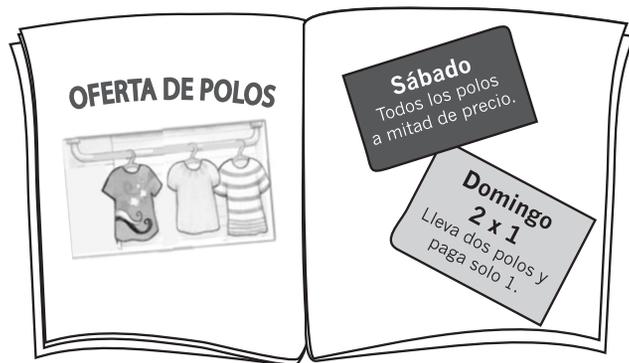
- a) 3^2
- b) $3 \times 8 + 12 : 4 - 10$

Respuesta esperada del alumno:

- a) 9
- b) 17

- Alta demanda cognitiva, orientada a movilizar habilidades cognitivas complejas relacionadas con la formulación y la resolución de problemas, en especial los problemas abiertos, con variadas formas de resolución y con una o más respuestas válidas. Por ejemplo:

Una tienda de polos hace el siguiente anuncio:



Según esta información, ¿qué día conviene ir a comprar?
Explica por qué.

En los estudios realizados por Cueto S., Ramírez C., León J. y Pain O. (2003) y el Ministerio de Educación del Perú – Unidad de Medición de la Calidad Educativa (2006), acerca de las oportunidades de aprendizaje en sexto o en cuarto grado de primaria, se ha reportado que la demanda cognitiva de la mayoría de tareas trabajadas en clase es baja; esta situación influye negativamente en el rendimiento académico de los estudiantes. Por ello, un desafío de cambio consiste en replantear el nivel de complejidad de las tareas de aprendizaje desarrolladas en clase, de modo que se propongan principalmente tareas de alta demanda cognitiva.

Cabe señalar que lo pertinente no es dejar de realizar ejercicios u otras tareas de baja demanda cognitiva, sino que estas no constituyan el foco de atención ni acaparen la mayor parte del tiempo, de la energía y de los recursos invertidos en clase; incluso, en el caso de los ejercicios, lo aconsejable es que se enfatice en su significado así como en la justificación para desarrollarlos, antes que asumirlos como una secuencia de pasos fijos que conducen a una respuesta.

La siguiente tabla ha sido elaborada utilizando la distinción entre alta y baja demanda cognitiva (propuesta por Stein, M.; Schwan, S.; Henningsen, A. y Silver E.¹⁰ como se señala en la traducción hecha por Cueto & et al, 2003), y puede servir para la identificación de tareas pertinentes, ya que facilita el contraste entre tareas de aprendizaje de baja o de alta demanda cognitiva.

	Baja demanda cognitiva	Alta demanda cognitiva
Tareas de aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> • Responder en forma oral preguntas que apelan al recuerdo de lo ya tratado. • Repetir definiciones, oralmente o por escrito. • Repetir/recitar fórmulas matemáticas. • Identificar palabras claves asociadas a un procedimiento matemático. • Describir procesos matemáticos elementales. 	<ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas que tienen varias formas de solución. • Resolver problemas abiertos o que tienen dos o más respuestas válidas. • Adaptar una estrategia para resolver un problema. • Formular problemas que respondan a determinadas condiciones. • Desarrollar un proyecto de aprendizaje durante un periodo relativamente amplio. • Establecer o comprobar conjeturas.

¹⁰ La clasificación establece categorías para las tareas de aprendizaje: tareas de memorización, procedimientos sin conexiones, procedimientos con conexiones, y haciendo matemática; las dos primeras corresponden a baja demanda cognitiva, y las otras dos a alta demanda cognitiva.

	Baja demanda cognitiva	Alta demanda cognitiva
Tareas de aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar o diseñar figuras geométricas a partir de su definición o de una breve descripción. • Resolver ejercicios o algoritmos de las operaciones aritméticas con números naturales, decimales o fraccionarios. • Efectuar procedimientos específicos, sin conectarlos con otros procedimientos o contenidos. Por ejemplo, descomponer un número en sus factores primos. • Reemplazar datos en una fórmula conocida, efectuar operaciones y dar un resultado. • Identificar datos en una tabla estadística o de doble entrada. • Completar datos, de fácil identificación, en una tabla. • Completar o elaborar un gráfico estadístico a partir de información explícita. • Hallar el término que falta a partir de examinar una secuencia con una regularidad explícita. • Realizar tareas que requieran reproducir nociones o técnicas ya presentadas a los estudiantes. • Resolver “problemas tipo” a partir de ejemplos resueltos por el docente. 	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollar demostraciones sencillas. • Justificar el uso de conceptos o de procedimientos matemáticos. • Evaluar el valor de verdad de una proposición matemática. • Establecer contraejemplos para probar la falsedad de una proposición. • Argumentar acerca de la validez de un enunciado o de un procedimiento. • Identificar procedimientos o argumentos equivocados y rebatirlos. • Examinar datos y reconocer regularidades numéricas o geométricas, no directas. • Evaluar una regularidad numérica o geométrica, y expresar verbalmente su regla de formación. • Realizar tareas que involucren desarrollar habilidades con contenidos aún no conocidos por los estudiantes. • Utilizar representaciones gráficas o simbólicas para explicar un concepto o un procedimiento. • Transformar una representación en otra(s) equivalente(s), cuando no apela directamente a la memoria. • Analizar similitudes y diferencias entre dos o más representaciones, soluciones o técnicas. • Elaborar mapas conceptuales. • Construir organizadores visuales que sinteticen aprendizajes logrados. • Aplicar conceptos y procedimientos matemáticos en contextos de la vida cotidiana. • Explicar nociones o procedimientos matemáticos con pertinencia, claridad y fluidez.

4.2 Dar un tratamiento constructivo a los errores de los estudiantes

Los resultados de la prueba evidencian que un alto porcentaje de estudiantes del sexto grado de primaria presentan errores que expresan sus dificultades en la comprensión y en el uso de aquellas nociones y procedimientos deseables para el grado.

Los procesos de aprendizaje inevitablemente involucran errores; en este estudio, hemos puesto atención a los que aparecen en forma sistemática, asociados a determinado tipo de dificultad. Los errores resultan de procesos donde interactúan muchas variables (el entorno social, las culturas, el currículo, los medios y materiales educativos, la práctica docente, la complejidad del objeto de estudio, entre otras) y en los cuales es difícil determinar relaciones. Así, un error establece conexiones con otros y puede ser indicio de más de una dificultad. De modo que al enfrentarlos, tal como considera Bachelard, se debe considerar que “los errores no se destruyen uno por uno con facilidad. Están coordinados” (citado en Rico, 1995).

El tratamiento de los errores representa un desafío para los docentes. Asumir posturas renovadoras y constructivas acerca de los errores favorecerá tanto su desarrollo personal como el aprendizaje de sus estudiantes. En esta perspectiva, se presentan las siguientes sugerencias:

► Asumir el error como una oportunidad de aprendizaje

En ocasiones, algunos docentes suelen reaccionar con enojo y toman acciones punitivas contra un estudiante cuando este comete un error. Emplean la reprimenda, la crítica o la condena pública, o amenazan con reprobarlo en Matemática. Actúan suponiendo que así anularán o evitarán la ocurrencia del error. Por su parte, el niño buscará evitar la sanción, adoptando un comportamiento pasivo; de modo que es probable que se inhiba y no se involucre en su aprendizaje.

Por lo tanto, se comprueba que conviene adoptar una postura distinta: sería beneficioso que el docente asuma el error detectado como una fuente de aprendizaje, tanto para el estudiante como para él mismo. Un error proporciona valiosa información si se indaga acerca de cómo y por qué se produjo.

Una actitud constructiva del docente permitirá abordarlo y propiciar mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje. A su vez, los estudiantes se sentirán más seguros y motivados, involucrándose en su desarrollo y en su aprendizaje.

Tal como señala Luis Rico (1995), los errores también pueden usarse para propiciar un acercamiento de los estudiantes a la naturaleza de las Matemáticas, de modo que –aparte de los contenidos específicos implicados– puedan desarrollar una visión acerca de cómo se construye, sus alcances y sus limitaciones, la metodología empleada y las actitudes positivas que incentivan su desarrollo.

► **Indagar y descubrir las causas del error. No hay “recetas” para superarlos.**

Ante un error del estudiante, no es aconsejable mostrar cómo superarlo, acción que algunos docentes realizan creyendo que así se evitará la ocurrencia de ese tipo de error en el futuro. Tampoco es conveniente reforzar el conocimiento de reglas o técnicas con la intención de que los estudiantes las repliquen para obtener la respuesta correcta en situaciones del mismo tipo.

¿Qué se puede hacer? A partir de las evidencias del desempeño de un estudiante, el docente puede interactuar con él a fin de orientarlo para que identifique la naturaleza de sus dificultades y actúe para revertirlas. Una manera de hacerlo es mediante el conflicto cognitivo; en esta interacción, la capacidad de escucha del docente es fundamental. Veamos un caso. Ante la pregunta:

En la Banda de Música de la escuela hay 30 estudiantes, de los cuales $\frac{2}{5}$ tocan tambor. ¿Cuántos estudiantes tocan tambor?

Un estudiante realizó el siguiente procedimiento incorrecto: $30 : 2 = 15$, y su respuesta fue “15 estudiantes tocan tambor”.

Los siguientes diagramas muestran el contraste entre dos formas de proceder ante el error cometido.

Procedimiento inadecuado

Decirle al estudiante que en situaciones como esta, siempre el numerador multiplica a la cantidad, obteniendo un producto que luego se divide entre el denominador para dar con la respuesta:
 $(2 \times 30) \div 5 = 12$

Procedimiento sugerido

Preguntarle: ¿cuántos estudiantes hay en la Banda de Música?, ¿podrías representar a los estudiantes de la Banda?, ¿cuál representa la “unidad” a la que debe aplicarse la fracción dada: un estudiante o los treinta estudiantes?

Proponer situaciones similares, sustituyendo los valores, para poner en juego su “aprendizaje”.

Al verificar que resuelve este tipo de “problemas”, dar por hecho y afirmar que “logró el aprendizaje”.

A partir de las respuestas, se puede definir si la dificultad está o no en la identificación de la unidad a la que se aplicará la fracción cuando se trabaja con cantidades discretas. También convendría preguntar qué representa cada elemento de la fracción $\frac{2}{5}$. Según la respuesta, se puede determinar si tiene dificultad o no en la interpretación de la fracción.

Es cuestionable que se recomienden procedimientos prefijados o reglas para enfrentar situaciones parecidas a las que el docente desarrolla en una clase. ¿Qué pasaría si, por incorporarlo en forma poco reflexiva, este procedimiento se aplicara a situaciones donde es improcedente? Esto se puede ver en la siguiente variante de la situación sobre la cual se plantearon los dos procedimientos alternativos.

En la Banda de Música de la escuela hay 30 estudiantes que tocan tambor y constituyen $\frac{2}{5}$ de los estudiantes de la Banda. ¿Cuántos estudiantes tocan en la Banda de la escuela?

En este caso, al aplicar la regla mencionada (“el numerador se multiplica por la cantidad y el producto resultante se divide por el denominador”), un estudiante obtuvo 12. Entonces, cabría preguntarle: ¿es posible que en una Banda de Música conformada por 12 estudiantes, sean 30 los que toquen el tambor?

Una acotación final, y no por ello menos importante: una retroalimentación eficaz por parte del docente no solo debe ser interactiva, dialógica, sino además oportuna. Por tanto, es recomendable actuar con prontitud luego del momento o circunstancia en que se produjo el error.

► **Las tareas repetitivas no posibilitan la comprensión y la superación de errores.**

Algunos docentes consideran que se aprende más si existe una mayor cantidad de ejercicios resueltos; esto no es del todo cierto, porque la repetición de un mismo tipo de tarea puede generar en el estudiante la incorporación de una regla independientemente de la comprensión de la situación a resolver, y esta podría ser recuperada con error, especialmente cuando se memorizan varias reglas. La siguiente operación sirve como ejemplo:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{5-3} = \frac{2}{2}$$

Este error pudo haber ocurrido por una confusión al recuperar y aplicar un procedimiento análogo al utilizado en la multiplicación, en lugar del que corresponde a la sustracción. Si el estudiante hubiese procurado comprender la situación, antes de incorporar mecánicamente la regla, posiblemente hubiese propuesto otras formas de resolverla.

4.3 Involucrarse en procesos de formación continua que mejoren la labor profesional en el área de Matemática

Complejos procesos sociales de crecimiento económico, migración poblacional, movilidad social, violencia, y un cambio cultural, donde las TIC y lo virtual tienen presencia creciente en la vida cotidiana, configuran escenarios con problemas, desafíos y oportunidades, que pueden ser aprovechados por los docentes si actúan con compromiso por su valiosa labor y cuentan con una visión de aprendizaje a lo largo de toda la vida. En particular, el país necesita que reajusten y enriquezcan su formación profesional con un sólido fundamento ético. La situación actual, donde un considerable grupo de ellos está involucrado en procesos formales de formación continua (segunda especialización, diplomados, maestrías y doctorados, entre otros), es un importante punto de apoyo para impulsar los procesos de mejora.

En ese escenario, los resultados de la evaluación realizada pueden ser percibidos como una especie de interpelación al país y, también, como una invitación a una acción conjunta de todos los agentes educativos. Particularmente, en cuanto a los docentes, la envergadura de los procesos de mejora exige una actuación organizada en equipo. El trabajo aislado tiende a debilitarse en el largo plazo, de ahí que es importante involucrarse y sostener un trabajo coordinado mediante redes docentes, virtuales o presenciales. Por iniciativa de los propios docentes, de las instituciones educativas o por acción del Minedu (en sus diferentes niveles de gestión), se están impulsando o estructurando algunas formas de organización, con diversos grados de actividad e incidencia en la formación continua o permanente, las cuales representan una gran oportunidad que debería ser aprovechada; entre estas se encuentran el Programa Estratégico de Logros de Aprendizaje (PELA) y el soporte pedagógico en IE públicas. Por su parte, los equipos docentes pueden generar o institucionalizar una asignación de tiempo para atender específicamente esta labor; para progresar en ese propósito, requieren contar con el apoyo del personal directivo.

Al involucrarse en redes articuladas de trabajo colaborativo, los docentes pueden fortalecer su formación tanto pedagógica como matemática. La formación pedagógica debe atender las necesidades prácticas, consolidar los logros y afrontar las dificultades de intervención docente cotidiana dentro y fuera del aula; a su vez, la formación matemática debe enfocarse en desarrollar habilidades asociadas a las partes esenciales o núcleos de la red de contenidos propia de la matemática escolar, particularmente del nivel de primaria, priorizando aquellos que el grupo de docentes determine (por ejemplo, resolución de problemas que involucran números fraccionarios). Asimismo, es sumamente valioso atender el tratamiento pedagógico de estos contenidos matemáticos, de modo que se cuente con alternativas pertinentes para su enseñanza y aprendizaje; una de estas es producir o adecuar propuestas que, en el plano cognitivo, favorezcan el tránsito a un pensamiento abstracto, formal, característico en los estudiantes que culminan la primaria.

La sistematización de la experiencia de cada docente (con materiales didácticos, diseño de sesiones, guías de actividades, clases filmadas, etc., todos validados) será un insumo fundamental en estos procesos de formación continua. A su vez, la difusión de buenas prácticas en estas redes revaloriza su condición profesional y beneficia a otros docentes y, sobre todo, a los estudiantes.

En este marco de formación docente continua, un ámbito especial de tratamiento en equipo son las dificultades de los estudiantes. Sobre los errores y la formación del profesorado, Rico (1995) sostiene que el análisis de los errores cometidos por los estudiantes y la discusión colectiva de los caminos posibles para su superación reflejan las concepciones que tiene cada docente sobre el conocimiento matemático y la naturaleza de su aprendizaje. Por tanto, compartir ideas y recursos para identificar los errores, analizarlos, y establecer pautas de interacción y de ayuda a los estudiantes para que estos lo superen, puede ser un aspecto importante del trabajo colaborativo de los docentes en la(s) red(es) en que participan. Así no solo actúan con mayor eficacia beneficiando a sus estudiantes, sino también potencian su desarrollo personal y, específicamente, profesional.

Glosario

1. Algoritmo (matemático): Es una secuencia finita de instrucciones, pasos o acciones, definida sin ambigüedades, que conduce a la obtención de la respuesta a un ejercicio o a la solución de una tarea. Por ejemplo: el algoritmo de la multiplicación de dos fracciones o la medición de un ángulo en el plano con ayuda de un transportador.

2. Cantidad continua: Es aquella que consta de unidades o partes que no están separadas unas de otras. Se puede expresar mediante números decimales. Ejemplos: el peso, la talla, la cantidad de líquido en un vaso, el tiempo, entre otras.

3. Cantidad discreta: Es aquella que consta de unidades o partes separadas unas de otras. Se puede expresar mediante números naturales. Ejemplos: la cantidad de estudiantes en una IE, la cantidad de hermanos, la cantidad de pelotas, la cantidad de ovejas, entre otras.

4. Cognición humana: Es la actividad psíquica orientada a la asimilación y a la producción de conocimientos. Además de aquella que se realiza en el nivel inconsciente, esta presenta un nivel superior, consciente, de base social.

5. Conjeturar: Elaborar suposiciones o hipótesis acerca de la verdad o de la falsedad de una afirmación, conclusión o resultado matemático a partir de indicios y de observaciones. (Adaptado, a partir del Diccionario de la RAE, por el Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica [Ipeba], 2013a).

6. Decodificación: Proceso mediante el cual un receptor (por ejemplo, un estudiante) descifra señales, signos y símbolos utilizados en determinado mensaje.

7. Modelar (Modelamiento matemático): Asociar un objeto no matemático a un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características consideradas relevantes para la solución de un problema (Delgado, J., 1998).

8. Razonamiento deductivo: Es un modo de razonamiento en el cual a partir de ciertos enunciados (las premisas) se deriva otro (la conclusión), de manera tal que siempre que las premisas sean verdaderas, la conclusión es también verdadera.

9. Razonamiento heurístico: Llamado también razonamiento plausible, es la forma de razonamiento más utilizada en la vida cotidiana. Parte de suposiciones apoyadas en hechos pertinentes y emplea la inducción corriente, la analogía, las observaciones sistemáticas y los experimentos para obtener nuevos conocimientos. Se caracteriza por ser intuitivo, provisional, discutible.

10. Razonamiento inductivo: Es un modo de razonamiento que consiste en atribuir a todos los elementos de un conjunto una propiedad verificada para algunos de este. Requiere una validación de la conclusión, por lo que esta automáticamente no puede aceptarse como válida; para ello, deberá recurrirse al razonamiento deductivo.

11. Razonamiento matemático: Es una capacidad que la persona desarrolla en el plano del pensamiento abstracto, empleando los conocimientos matemáticos que posee para obtener nuevos conocimientos. Moviliza esencialmente nociones y conceptos, y se expresa como pensamiento dirigido y ordenado. Además, utiliza tanto la intuición como el rigor lógico. Se puede establecer dos clases: razonamiento heurístico y razonamiento deductivo.

12. Regularidad: Es una característica constante presente en determinadas situaciones, hechos u objetos, susceptible de tratamiento matemático.

13. Situación determinista: Es una situación que no presenta incertidumbre; es decir, el resultado se puede determinar de antemano.

14. Situación aleatoria: Es una situación en la cual encontramos que existe incertidumbre sobre el resultado de la acción que conlleva (Ipeba, 2013b). Cuando se puede reproducir bajo las mismas restricciones y condiciones, se denomina experimento aleatorio.

15. Tarea: Actividad específica realizada por el estudiante en una evaluación, la cual permite medir el logro de sus aprendizajes en determinada competencia. La tarea exige emplear capacidades y conocimientos con el objetivo de conseguir un resultado concreto en un contexto determinado; este refleja, en lo posible, situaciones reales, propias de la vida personal y social del estudiante (tarea auténtica). Las tareas pueden ser simples (baja demanda cognitiva) o complejas (alta demanda cognitiva).

Bibliografía

- Arriaga, G. (2008). *Procesos de generalización con estudiantes de 1° y 2° de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal: una propuesta de enseñanza*. (Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional). Recuperada de: <http://200.23.113.59/pdf/25965.pdf>
- Boyer, C. (1992). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.
- Cueto, S., Ramírez, C., León, J. y Pain, O. (2003). *Oportunidades de aprendizaje en una muestra de estudiantes de sexto grado de primaria de Lima*. (Documento de Trabajo 43). Lima: GRADE.
- D' Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I. y Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Delgado, J. (1998). Los procedimientos generales matemáticos. En Hernández, H.; Delgado, J.; Fernández, B.; Valverde L. & Rodríguez, T. *Cuestiones de didáctica de la Matemática* (pp. 69-87). Rosario: Homo Sapiens.
- Escamilla, A. (2008). *Las competencias básicas*. Barcelona: Grao.
- Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica. (2013a). *Mapas del Progreso del Aprendizaje. Matemática: Geometría*. Lima: Autor.
- Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica. (2013b). *Mapas del Progreso del Aprendizaje. Matemática: Estadística y probabilidad*. Lima: Autor.
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.
- Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales*. (1.a ed.). Santiago: Academia Chilena de Ciencias.
- Medina, L. (2011). *Dificultades en la lectura e interpretación de gráficas estadísticas en estudiantes de grado décimo* (Tesis de Licenciatura en Matemática, Universidad Industrial de Santander). Disponible en: <http://repositorio.uis.edu.co/jspui/bitstream/123456789/7204/2/142024.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú – Unidad de Medición de la Calidad Educativa. (2005). *Evaluación Nacional del rendimiento Estudiantil 2004. Informe Pedagógico de Resultados. Formación matemática*. Documento de Trabajo 14. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/documentos/archivo_14.pdf

- Ministerio de Educación del Perú – Unidad de Medición de la Calidad Educativa (2006). *Comprendiendo la escuela desde su realidad cotidiana: estudio cualitativo en 5 escuelas estatales de Lima*. Documento de Trabajo 22. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/documentos/archivo_22.pdf
- Ministerio de Educación del Perú. (2009). *Diseño Curricular Nacional*. Lima: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000a). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000b). *Resumen Ejecutivo. Principios y estándares para la educación matemática*. Recuperado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/Executive%20Summary%20Spanish_e-Final.pdf.
- Polya, G. (1969). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid.
- Rico, Luis (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico & P. Gómez (Eds.) *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una empresa docente.
- Sánchez, M. (2001). *Dificultades específicas en el aprendizaje de las fracciones. Estudio de casos. Implicaciones para la formación de maestros*. En M. Chamorro (Ed.) *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas*. (pp. 11-24). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Zambrano, G. (2004). *Las oportunidades de aprendizaje en Matemática: un estudio para 4° de secundaria*. Boletín UMC, N° 26. Ministerio de Educación del Perú. Recuperado de <http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/publicaciones/boletines/Boletin-26.pdf>

Anexos

Anexo A. Tablas de especificaciones

Tabla A1. *Matemática EM 2013. Cantidad de ítems por capacidad a evaluar*

Capacidad	n	%
Razonamiento y demostración	23	19
Comunicación matemática	26	22
Resolución de problemas	71	59
TOTAL	120	100

Tabla A2. *Matemática EM 2013. Cantidad de ítems por organizador*

Organizador	n	%
Números y operaciones	49	41
Cambio y relaciones	15	13
Geometría	28	23
Estadística y probabilidad	28	23
TOTAL	120	100

Tabla A3. *Matemática EM 2013. Cantidad de ítems por contexto*

Contexto	n	%
Intramatemático	17	14
Extra matemático	103	86
TOTAL	120	100

Anexo B. Tablas de resultados por niveles de logro según estratos y resultados nacionales

Las tablas y figuras de este anexo B presentan los resultados desagregados según diferentes estratos. Esta desagregación considera algunas características específicas de los estudiantes (sexo y lengua materna) y de las instituciones educativas (tipo de gestión, ubicación geográfica y característica). Es necesario mencionar que el análisis y la interpretación de estos resultados deben realizarse considerando las diversas variables del entorno familiar y social de los niños, de la dinámica de cada escuela en particular y de las características de las regiones en la que se ubican las instituciones educativas.

Tabla B1. Medida promedio y porcentaje de estudiantes según nivel de logro en Matemática por sexo y lengua materna

		Medida promedio		Niveles de logro							
				Previo al inicio		En inicio		En proceso		Satisfactorio	
		\bar{X}	e.e	%	e.e	%	e.e	%	e.e	%	e.e
	Nacional	500	(1,70)	19,0	(0,42)	25,6	(0,42)	39,4	(0,42)	16,0	(0,63)
sexo	Hombre	504	(1,85)	18,3	(0,48)	24,7	(0,48)	39,9	(0,53)	17,1	(0,69)
	Mujer	496	(1,87)	19,7	(0,51)	26,5	(0,51)	38,8	(0,51)	15,0	(0,67)
Lengua	Castellano	510	(1,74)	15,4	(0,39)	24,9	(0,45)	42,0	(0,44)	17,7	(0,68)
	Lenguas originarias*	419	(2,14)	48,8	(1,22)	31,3	(0,85)	17,9	(0,82)	2,0	(0,22)

Fuente: MINEDU - UMC. Base de datos EM 2013. Sexto grado de primaria.

Nota: Los valores en negrita muestran diferencias estadísticamente significativas en su estrato ($\alpha=0.05$).

* Se construyó a partir de las variables que recogen el idioma que hablan los padres con el estudiante la mayor parte del tiempo.

De acuerdo con los **resultados nacionales según sexo**, el porcentaje de hombres en el nivel Satisfactorio es mayor que el de las mujeres. ¿También se da esta diferencia en su escuela? ¿Es posible que algunas prácticas pedagógicas de la escuela hayan influido en esta situación? ¿Qué acciones de los docentes, de los padres de familia y de los estudiantes contribuirían a disminuir las diferencias entre hombres y mujeres para lograr que todos mejoren sus logros?

Por otro lado, en los resultados nacionales según la lengua materna de los estudiantes, se observa una gran brecha entre aquellos que hablan solo castellano y los que tienen como lengua materna una originaria. En su escuela, ¿los estudiantes son castellanohablantes o también hay niños bilingües? ¿A qué podría deberse la brecha en los resultados de ambos grupos de estudiantes? Como la mayoría de los niños que tienen como lengua materna una originaria viven en zona rural y están en condición de pobreza, ¿de qué manera esta situación podría afectar el desarrollo de su competencia matemática y en qué medida podría limitar el desarrollo de su habilidad matemática? ¿En qué medida las prácticas docentes y de la escuela contribuyen a reducir o a ampliar las diferencias en los logros de aprendizaje de los estudiantes según su lengua materna? ¿Qué estrategias se podrían implementar para atender los distintos ritmos de aprendizaje y las necesidades educativas de los estudiantes bilingües? ¿Qué estrategias plantearía la institución educativa en conjunto y los docentes en particular para atender de manera pertinente a la población escolar cuya lengua materna es una lengua originaria a fin de elevar sus niveles de logro?

Tabla B2. Medida promedio y porcentaje de estudiantes según nivel de logro en Matemática por gestión, área y característica

		Medida promedio		Niveles de logro							
				Previo al inicio		En inicio		En proceso		Satisfactorio	
		\bar{X}	e.e	%	e.e	%	e.e	%	e.e	%	e.e
	Nacional	500	(1,70)	19,0	(0,42)	25,6	(0,42)	39,4	(0,42)	16,0	(0,63)
Gestión	Estatal	484	(2,08)	23,0	(0,53)	28,5	(0,51)	37,0	(0,49)	11,5	(0,73)
	No estatal	555	(3,04)	5,3	(0,43)	15,9	(0,80)	47,4	(0,83)	31,5	(1,35)
Área	Urbana	520	(1,89)	12,0	(0,36)	24,1	(0,50)	44,2	(0,47)	19,7	(0,77)
	Rural	430	(2,05)	43,7	(1,01)	30,9	(0,66)	22,3	(0,77)	3,1	(0,36)
Característica	Polidocente completo	513	(1,86)	14,3	(0,39)	24,6	(0,48)	42,7	(0,46)	18,4	(0,73)
	Multigrado	440	(3,09)	40,6	(1,28)	30,1	(0,84)	24,2	(0,96)	5,2	(0,72)

Fuente: MINEDU - UMC. Base de datos EM 2013. Sexto grado de primaria.

Nota: Los valores en negrita muestran diferencias estadísticamente significativas en su estrato ($\alpha=0.05$).

En la tabla B.2., puede observarse que a nivel nacional las escuelas no estatales tienen un mayor porcentaje de estudiantes en el nivel Satisfactorio que las estatales. En la Evaluación Censal de Estudiantes de segundo grado de primaria esta diferencia prácticamente ha desaparecido. ¿De qué manera la gestión pedagógica e institucional de la escuela podría influir en los resultados de los estudiantes? ¿En qué medida los logros de aprendizaje que alcanzan los estudiantes de sexto grado forman parte de la reflexión y de la planificación conjunta de la institución educativa? ¿Qué actividades educativas y qué estrategias pedagógicas podrían implementarse en su escuela para reducir esta brecha?

Asimismo, puede observarse que se presenta mucho mayor porcentaje de estudiantes en el nivel Satisfactorio en las escuelas urbanas que en las rurales. Si se sabe que la mayor parte de la población en situación de pobreza está en la zona rural, ¿de qué manera podría afectar esta situación el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes? ¿Qué aspectos del contexto rural pueden ser aprovechados por las instituciones educativas y por los docentes para enriquecer los aprendizajes de los estudiantes y elevar sus niveles de logro? ¿Se puede convertir el medio rural en un “libro de texto” por explorar y se puede aprender a partir de este? ¿Qué formas de cooperar entre los distintos agentes educativos (directivos, docentes y padres) se podrían plantear para superar la situación en la que se encuentran los estudiantes?

En la tabla B.2, también puede observarse que a nivel nacional existe una gran diferencia entre los resultados de los estudiantes de una escuela polidocente completa y los de una escuela multigrado. La labor docente en la escuela multigrado supone un gran reto, pues se debe atender a niños de diferentes edades y con distintos ritmos de aprendizaje. ¿Qué estrategias aplica para atender a los estudiantes de manera diferenciada? Si se sabe que el trabajo entre estudiantes favorece el aprendizaje, ¿cómo organizaría a los niños para potenciar la cooperación entre los de distintos grados y enriquecer su aprendizaje? ¿En qué casos es posible aplicar estrategias similares en escuelas polidocentes?

Tabla B3. Medida promedio y porcentaje de estudiantes según nivel de logro en Matemática solo para IE estatales según área y característica

		Medida promedio		Niveles de logro							
				Previo al inicio		En inicio		En proceso		Satisfactorio	
		\bar{X}	e.e	%	e.e	%	e.e	%	e.e	%	e.e
	Nacional	500	(1,70)	19,0	(0,42)	25,6	(0,42)	39,4	(0,42)	16,0	(0,63)
Área	Urbana	505	(2,47)	14,8	(0,49)	27,5	(0,65)	42,9	(0,57)	14,8	(0,96)
	Rural	430	(2,05)	43,7	(1,02)	31,0	(0,66)	22,2	(0,77)	3,1	(0,37)
Característica	Polidocente completo	497	(2,36)	17,7	(0,52)	27,8	(0,60)	41,0	(0,54)	13,6	(0,89)
	Multigrado	432	(2,41)	43,3	(1,17)	31,1	(0,82)	22,1	(0,89)	3,5	(0,49)

Fuente: MINEDU - UMC. Base de datos EM 2013. Sexto grado de primaria.

Nota: Los valores en negrita muestran diferencias estadísticamente significativas en su estrato ($\alpha=0.05$).

El ejercicio del derecho a la educación contribuye a equilibrar las oportunidades que se brindan a los estudiantes para lograr su pleno desarrollo. Según esto, es importante analizar lo que ocurre con las instituciones educativas de gestión estatal. En la tabla B.3 se presentan los resultados nacionales de los estudiantes únicamente de escuelas estatales según área geográfica y según característica de la institución educativa. ¿Su escuela es urbana y polidocente o rural y multigrado? Como se observa, las brechas presentadas entre el conjunto de las escuelas urbanas (estatales y no estatales) y las rurales se mantienen cuando se analiza los resultados solo del conjunto de las escuelas estatales. ¿Qué podría indicar esta situación? ¿Por qué los niños de las escuelas rurales multigrado tienen menores logros de aprendizaje que los de escuelas urbanas y polidocentes? Si se toma en consideración que en la escuela rural y multigrado se concentran los estudiantes con más altos niveles de pobreza, ¿en qué medida su escuela atiende las necesidades de aprendizaje de acuerdo con el contexto de los estudiantes? ¿En qué medida los docentes y la escuela brindan oportunidades de aprendizaje que permitan la superación de las dificultades que el contexto plantea a sus estudiantes?

A manera de resumen, la figura B.1 presenta los porcentajes de estudiantes según nivel de logro tanto a nivel nacional como por estratos.

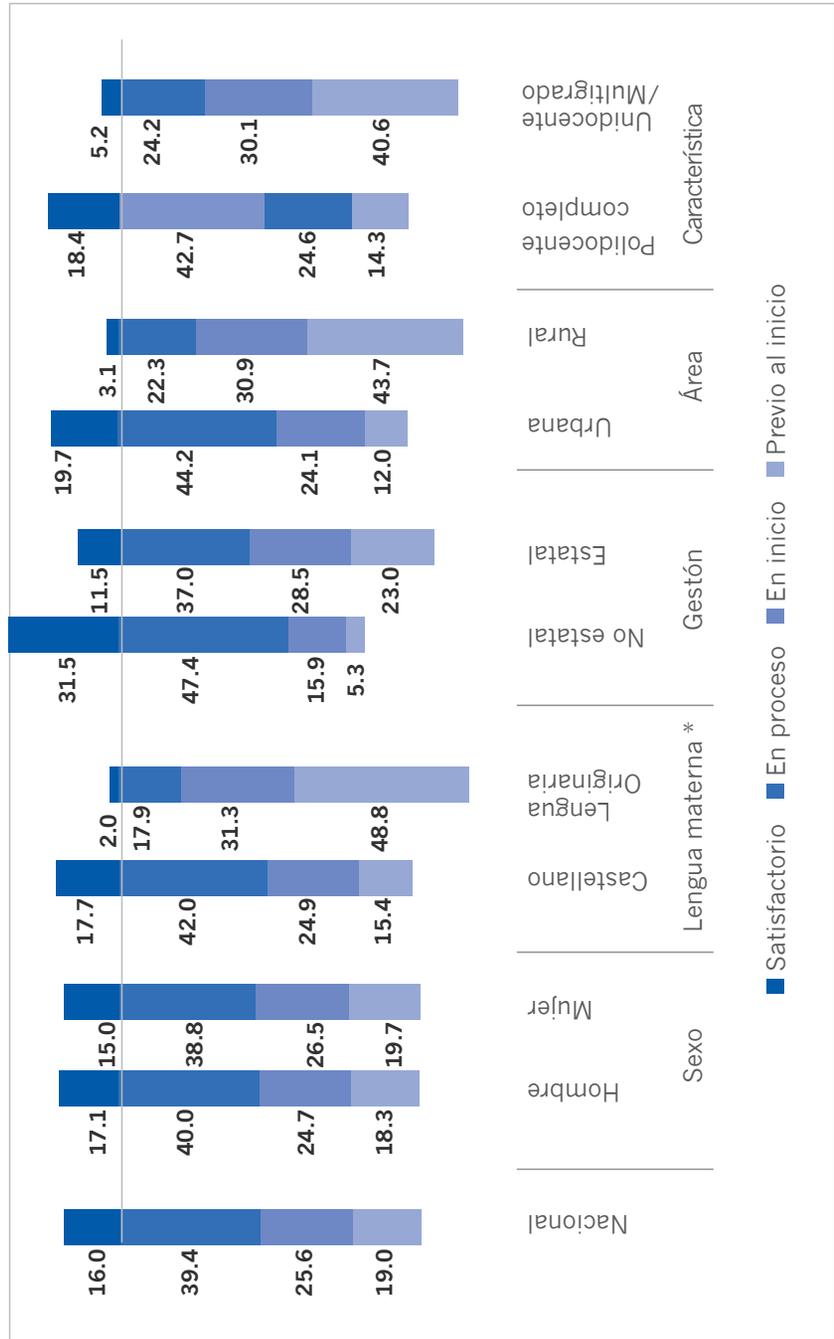


Figura B1. Resultados nacionales por estrato en Matemática

Tabla B4. *Porcentaje de estudiantes en el nivel Satisfactorio por región en Matemática*

	Niveles de logro							
	Previo al inicio		En inicio		En proceso		Satisfactorio	
	%	e.e	%	e.e	%	e.e	%	e.e
Nacional	19,0	(0,42)	25,6	(0,42)	39,4	(0,42)	16,0	(0,63)
Amazonas	22,8	(2,14)	30,5	(1,68)	38,3	(2,06)	8,4	(1,11)
Áncash	29,0	(1,98)	26,3	(1,20)	33,2	(1,53)	11,4	(1,25)
Apurímac	43,3	(2,76)	27,6	(1,45)	24,0	(2,16)	5,1	(1,09)
Arequipa	6,0	(1,10)	17,5	(1,00)	47,3	(1,47)	29,2	(1,63)
Ayacucho	31,8	(3,04)	30,0	(1,79)	30,1	(2,52)	8,1	(1,42)
Cajamarca	25,4	(2,46)	29,2	(2,09)	33,0	(1,98)	12,4	(3,39)
Callao	5,7	(0,57)	21,1	(1,24)	49,6	(1,41)	23,6	(1,42)
Cusco	25,0	(1,95)	28,6	(1,49)	34,9	(2,04)	11,5	(1,25)
Huancavelica	33,7	(2,40)	36,3	(1,84)	25,0	(2,38)	5,0	(0,94)
Huánuco	38,3	(2,50)	29,2	(1,47)	26,8	(1,96)	5,7	(0,82)
Ica	11,6	(1,22)	24,8	(1,31)	44,4	(1,43)	19,2	(2,01)
Junín	14,5	(1,60)	22,7	(1,64)	43,9	(1,57)	18,9	(1,88)
La Libertad	20,4	(1,63)	27,5	(1,26)	40,0	(1,67)	12,2	(1,48)
Lambayeque	13,0	(1,42)	27,7	(1,35)	44,7	(1,63)	14,7	(1,58)
Lima Metropolitana	6,6	(0,65)	20,5	(1,23)	47,1	(1,10)	25,9	(2,00)
Lima Provincias	11,3	(1,29)	26,3	(1,45)	46,3	(1,64)	16,2	(1,11)
Loreto	51,8	(2,56)	29,1	(1,54)	17,4	(1,51)	1,7	(0,47)
Madre De Dios	28,0	(2,76)	30,3	(1,61)	34,8	(3,04)	6,9	(0,89)
Moquegua	4,9	(0,75)	16,3	(1,39)	49,4	(1,86)	29,4	(2,45)
Pasco	18,1	(2,26)	26,2	(1,71)	42,0	(2,01)	13,6	(1,60)
Piura	20,6	(1,31)	28,4	(1,22)	40,4	(1,37)	10,5	(0,98)
Puno	30,4	(2,52)	31,4	(1,72)	31,2	(1,92)	7,0	(1,21)
San Martín	29,0	(1,98)	32,9	(1,54)	31,2	(1,71)	6,9	(1,15)
Tacna	3,8	(0,68)	14,4	(1,15)	48,8	(1,22)	33,1	(2,06)
Tumbes	23,7	(2,00)	32,9	(1,38)	37,0	(2,12)	6,4	(0,66)
Ucayali	32,9	(2,06)	34,4	(1,35)	28,2	(1,49)	4,6	(0,71)

Fuente: Minedu - UMC. Base de datos EM 2013. Sexto grado de primaria

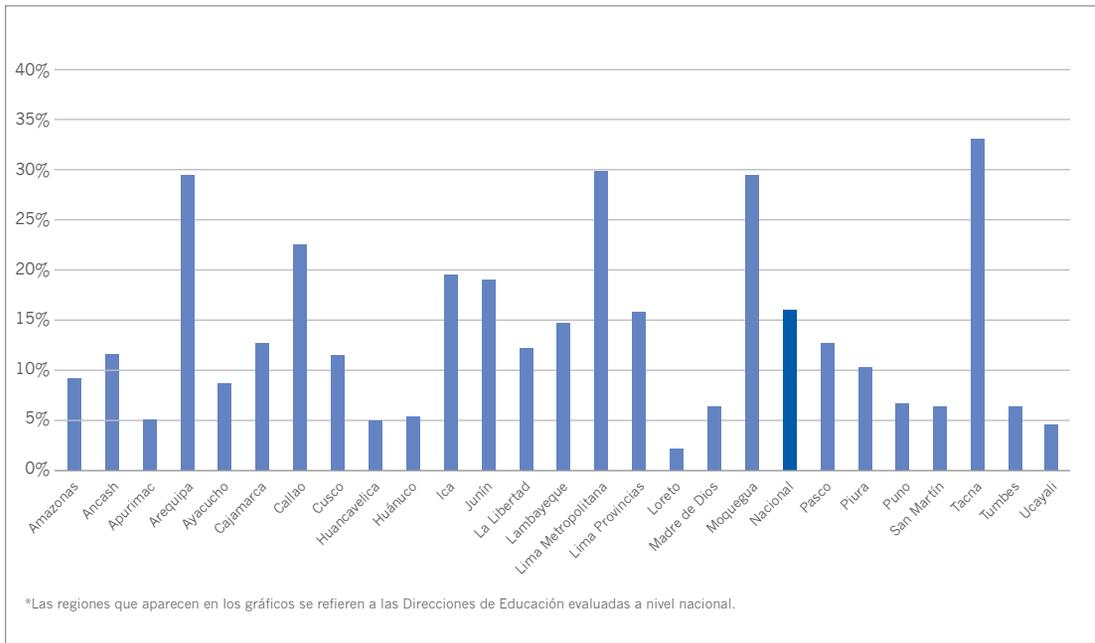


Figura B2. Porcentaje de estudiantes en el nivel Satisfactorio por región en Matemática

La tabla B.4 presenta resultados según el porcentaje de estudiantes en cada uno de los niveles de Logro por cada región y la figura B.2 presenta el porcentaje de estudiantes en el nivel Satisfactorio por región de manera gráfica para facilitar la lectura y comprensión de esa información. Como se observa, en el país, el 16,0% ha alcanzado el nivel Satisfactorio en Matemática. ¿Cuáles son los resultados en su región? ¿Qué factores podrían explicarlos? ¿Qué acciones se podrían realizar para superar esos resultados? Si toma en cuenta los resultados de regiones con características semejantes a la suya, ¿son también semejantes sus resultados? ¿Qué factores podrían ser tomados en cuenta para explicar esas semejanzas o diferencias? ¿Qué acciones se podrían realizar en su región para mejorar sus resultados?

Anexo C. Preguntas liberadas

Tabla C1. Cuadro resumen de las preguntas liberadas de Matemática de la Evaluación Muestral

N°	Respuesta	Capacidad	Contenido	Contexto	Nivel del logro	Indicador	Medida Rasch
1	c	Resolución de problemas	Números y operaciones	Real (extra matemático)	Satisfactorio	Interpreta las fracciones en su uso como operador en la solución de situaciones problemáticas.	539
2	a	Comunicación matemática	Estadística y probabilidad	Real (extra matemático)	Satisfactorio	Interpreta la noción de media aritmética o promedio de un grupo de datos.	532
3	c	Razonamiento y demostración	Cambio y relaciones	Real (extra matemático)	Satisfactorio	Interpreta el patrón de una secuencia numérica a partir del reconocimiento de patrones aditivos y/o multiplicativos, y determina el término solicitado.	523
4	<p><i>Respuesta correcta</i> Formula un problema contextualizado que utiliza la información presentada en el gráfico (parcial o totalmente) y cuya respuesta es "6 manzanas".</p> <p><i>Respuesta parcialmente correcta</i> Formula un problema contextualizado utilizando la información presentada en el gráfico; sin embargo, no formula su pregunta o, cuando lo hace, su respuesta no es "6 manzanas". En otros casos, formula un problema contextualizado utilizando solo el contexto de manzanas y cuya respuesta es "6 manzanas".</p>	Resolución y formulación de problemas	Números y operaciones	Real (extra matemático)	Satisfactorio	Formula un problema que involucra nociones aditivas y/ o multiplicativas con números naturales y decimales, a partir de información presentada en diversos formatos.	512
5	a	Razonamiento y demostración	Geometría	Disciplinar (intra matemático)	En proceso	Identifica el desarrollo en el plano de un sólido geométrico.	439

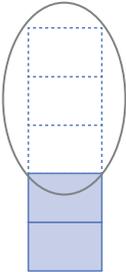
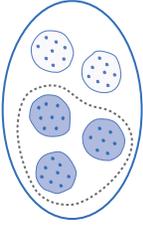
N°	Respuesta	Capacidad	Contenido	Contexto	Nivel del logro	Indicador	Medida Rasch
6	d	Comunicación matemática	Números y operaciones	Real (extra matemático)	En proceso	Recodifica una fracción propia desde su representación gráfica (continua o discreta) a la simbólica. Uso como parte de un todo.	405
7	c	Comunicación matemática	Estadística y probabilidad	Real (extra matemático)	En proceso	Interpreta información a partir de pictogramas, gráficos de barras o circulares.	403
8	a	Comunicación matemática	Estadística y probabilidad	Real (extra matemático)	En inicio	Interpreta información a partir de pictogramas, gráficos de barras o circulares.	353
9	<i>Respuesta correcta</i> Escribe "28" como término de la secuencia y explica cómo lo encontró. <i>Respuesta parcialmente correcta</i> Encuentra el patrón de la secuencia, pero no encuentra el término siguiente de la misma o se equivoca al encontrarlo. En otros casos, escribe "28" pero no explica cómo lo encontró.	Razonamiento y demostración	Cambio y relaciones	Disciplinar (intra matemático)	En inicio	Interpreta el patrón de una secuencia numérica a partir del reconocimiento de patrones aditivos y/o multiplicativos, y determina el término solicitado.	324
10	d	Resolución de problemas	Geometría	Real (extra matemático)	En inicio	Resuelve situaciones contextualizadas que involucran el cálculo del perímetro de un polígono a partir de medidas convencionales.	241

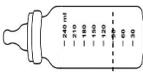
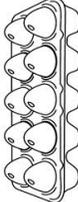
N°	Respuesta	Capacidad	Contenido	Contexto	Nivel del logro	Indicador	Medida Rasch
11	<p><i>Respuesta correcta</i> Halla la respuesta correcta ($3\frac{1}{4}$ kg, $\frac{13}{4}$ ó 3,25 kg o algún equivalente a estas expresiones) usando estrategias operativas de naturaleza aditiva o estrategias basadas en gráficas o esquemas.</p> <p><i>Respuesta parcialmente correcta</i> Utiliza un procedimiento que lo podría llevar a la respuesta correcta, pero no lo concluye o, en su defecto, comete errores de cálculo o de procedimiento.</p>	Resolución de problemas	Números y operaciones	Real (extra matemático)	Por encima de Satisfactorio	Resuelve problemas aditivos que involucren una situación de combinación (1 o 2) presentados en diversos tipos de textos, con fracciones y/o decimales.	649
12	d	Razonamiento y demostración	Geometría	Disciplinar (intra matemático)	Satisfactorio	Identifica triángulos de acuerdo con la medida de sus lados.	500
13	<p><i>Respuesta correcta</i> Dibuja sobre la cuadrícula un rectángulo, en cualquier posición, cuyos lados miden 4 ó 6 cuadraditos o unidades respectivamente, o un valor aproximado a estos. No se exige precisión en los trazos realizados.</p> <p><i>Respuesta parcialmente correcta</i> Dibuja sobre la cuadrícula un rectángulo donde una de las dimensiones del rectángulo original se duplica y la otra no, o lo hace erróneamente.</p>	Razonamiento y demostración	Geometría	Disciplinar (intra matemática)	Satisfactorio	Construye la ampliación o reducción de polígonos en función de la proporción de sus lados.	492

N°	Respuesta	Capacidad	Contenido	Contexto	Nivel del logro	Indicador	Medida Rasch
14	<p><i>Respuesta correcta</i> Determina que la cantidad de varones y de mujeres que hay en la escuela es la misma, mostrando o no su procedimiento. Se admite hasta un error en la transcripción de datos.</p> <p><i>Respuesta parcialmente correcta</i> Indica la cantidad correcta de varones y de mujeres que hay en la escuela, pero no responde a la pregunta; o, cuando utiliza un procedimiento que lo podría llevar a la respuesta correcta, comete errores de cálculo y emite una conclusión basada en su resultado.</p>	Resolución de problemas	Estadística y probabilidades	Real (extra matemático)	Satisfactorio	Interpreta información a partir de pictogramas, gráficos de barras o circulares.	505
15	<p><i>Respuesta correcta</i> Formula un problema que involucra los datos del cartel y/o el hecho de que hoy es miércoles. La pregunta planteada es coherente con el enunciado.</p> <p><i>Respuesta parcialmente correcta</i> Solo formula una pregunta, referida a la información presentada en el cartel. En otros casos, escribe un enunciado que corresponde a los datos del cartel, pero no formula la pregunta del problema o la pregunta no tiene relación con el enunciado.</p>	Resolución y formulación de problemas	Números y operaciones	Real (extra matemático)	Por encima de Satisfactorio	Formula un problema que involucra nociones aditivas y multiplicativas con números naturales y decimales, a partir de información presentada en diversos formatos.	620

Anexo D. Significados de la fracción

Tabla D1. Cuadro resumen de los significados de la fracción

Significados de la fracción	¿Qué significa los $\frac{3}{5}$ en cantidades continuas?	¿Qué significa los $\frac{3}{5}$ en cantidades discretas?
<p>Como parte - todo</p> <p>Se presenta cuando un todo (denominado también "unidad") es dividido en partes equivalentes, para luego establecer una relación entre las partes seleccionadas y el número total de partes que conforman el todo.</p>	<p>La imagen nos muestra una barra de chocolate que ha sido dividida en 5 partes iguales, de las cuales 3 partes ya comió Jaime. ¿Qué parte de la barra de chocolate se comió Jaime?</p>  <p>Jaime comió 3 partes, de las 5 en las que está dividida la barra de chocolate.</p> <p><i>Respuesta:</i> Jaime comió los $\frac{3}{5}$ de la barra de chocolate.</p>	<p>Observa la siguiente fuente con galletas:</p>  <p>¿Qué parte de la cantidad de galletas que hay en la fuente, son de chocolate?</p> <p>Se observa que 3 galletas, de las 5 que están en la fuente, son de chocolate.</p> <p><i>Respuesta:</i> Las galletas de chocolate son los $\frac{3}{5}$ del total de galletas que hay en la fuente.</p>
<p>Como cociente</p> <p>Se presenta en situaciones de reparto, cuando un todo o "unidad" se distribuye de manera equitativa entre un número de personas o de partes.</p>	<p>Juan tiene una soga de 3 metros de longitud y necesita cortarla en 5 trozos iguales. ¿Cuánto medirá cada trozo de soga obtenido?</p>  <p>Se tendrá que dividir los 3 metros de soga en 5 trozos iguales.</p> <p>Para saber cuánto mide cada trozo de soga se dividirá $3 : 5$, operación que se expresa como $\frac{3}{5}$.</p> <p><i>Respuesta:</i> Cada trozo medirá $\frac{3}{5}$ m.</p>	<p>Mario compra 3 pasteles iguales que los repartirá equitativamente entre 5 estudiantes. ¿Qué cantidad de pastel recibirá cada estudiante?</p> <p>Sea: E_1 = Estudiante 1 E_2 = Estudiante 2 E_3 = Estudiante 3 E_4 = Estudiante 4 E_5 = Estudiante 5</p> <p>1.^{er} pastel 2.^{do} pastel 3.^{er} pastel</p>  <p>Se podría partir un pastel en 5 partes iguales, por lo tanto a cada estudiante le corresponderá $\frac{1}{5}$ de cada pastel, o sea del primer, segundo y tercer pastel.</p> <p>Cada uno recibirá $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$</p> <p><i>Respuesta:</i> Cada estudiante recibirá $\frac{3}{5}$ de pastel.</p>

Significados de la fracción	¿Qué significa los $\frac{3}{5}$ en cantidades continuas?	¿Qué significa los $\frac{3}{5}$ en cantidades discretas?
<p><i>Como razón</i></p> <p>Surge en situaciones de comparación entre dos cantidades de la misma o de diferente magnitud.</p>	<p>Pepe vierte 90 ml de leche evaporada en un biberón. Luego lo mezcla con 150 ml de agua. ¿Cuál es la relación entre la cantidad de leche evaporada y la cantidad de agua que hay en este biberón?</p>  <p>Establecemos la relación comparando la cantidad de leche y de agua de la siguiente manera:</p> $\frac{\text{Leche evaporada (ml)}}{\text{Agua (ml)}} = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$ <p><i>Respuesta:</i> Por cada 3 ml de leche hay 5 ml de agua.</p>	<p>En un bus viajan 9 niñas y 15 niños. ¿Cuál es la relación que existe entre la cantidad de niñas y la cantidad de niños que viajan en este bus?</p> <p>Establecemos esta relación comparando la cantidad de niñas y de niños que viajan en el bus de la siguiente manera:</p> $\frac{\text{Niñas}}{\text{Niños}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ <p><i>Respuesta:</i> Por cada 3 niñas hay 5 niños que también viajan en el bus.</p>
<p><i>Como operador</i></p> <p>La fracción actúa sobre una cantidad mediante relaciones operativas de división y de multiplicación, de modo de que la transforma en una nueva cantidad.</p>	<p>En los $\frac{3}{5}$ de un terreno rectangular de 600 m² se construirán canchas deportivas para una comunidad. ¿Cuánto es el área que se utilizará para construir dichas canchas?</p> <p>Para determinar el área solicitada, la fracción $\frac{3}{5}$ opera sobre 600. Esto quiere decir que se deberá encontrar la quinta parte de 600 para luego triplicarla y así determinar el área solicitada.</p> $\frac{3}{5} \times 600 = 3 \times 120 = 360 \text{ m}^2$ <p><i>Respuesta:</i> El área que se utilizará para construir las canchas deportivas es 360 m².</p>	<p>Al caerse la caja de huevos mostrada, se rompieron $\frac{3}{5}$ de ellos. ¿Cuántos huevos se rompieron?</p>  <p>Para determinar la cantidad de huevos rotos, la fracción $\frac{3}{5}$ opera sobre 10. Esto quiere decir que se deberá encontrar la quinta parte de 10 para luego triplicarla y así determinar la cantidad de huevos que se rompieron.</p> $\frac{3}{5} \times 10 = 3 \times 2 = 6$ <p><i>Respuesta:</i> Se rompieron seis huevos.</p>

Significados de la fracción

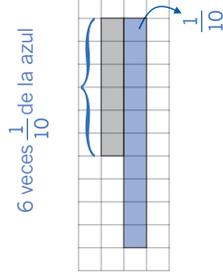
Como medida

Surge al comparar dos magnitudes, de las cuales una de ellas es el referente para medir y la otra es la que se quiere medir.

¿Qué significa los $\frac{3}{5}$ en cantidades continuas?

Si utilizamos como referente el largo de la figura azul, ¿cuánto mide el largo de la figura gris?

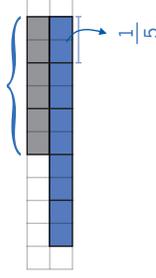
Respuesta: Referente



Al compararlas, observamos que la figura gris es 6 veces la décima parte de la figura azul (referente).

3 veces $\frac{1}{5}$ de la azul

Pero también podríamos decir que la figura gris es 3 veces la quinta parte de la figura azul.



Respuesta: El largo de la figura gris puede ser expresado como los $\frac{6}{10}$ o los $\frac{3}{5}$ del largo de la figura azul.

¿Qué significa los $\frac{3}{5}$ en cantidades discretas?

La capacidad de una caja permite guardar, como máximo, 20 conservas de 80 g cada una. Si utilizamos la misma caja para guardar 12 conservas similares a las anteriores, ¿qué parte de su capacidad máxima se ocupará?

Si comparamos las 12 conservas con la capacidad máxima de la caja, podremos determinar qué parte de esta capacidad se ocupará.



$$\frac{12 \text{ conservas}}{20 \text{ conservas}} = \frac{3}{5} \text{ de su capacidad}$$

Respuesta: Se ocupará los $\frac{3}{5}$ de su capacidad máxima.

Ministerio de Educación

**Calle Del Comercio 193,
San Borja - Lima, Perú
Telf: (511) 615-5800**

<http://www.minedu.gob.pe/>
